

## V – LEVANTAMENTOS PLANIMÉTRICOS

Genival Corrêa de Souza

O levantamento topográfico é a operação fundamental da Topografia. Por meio dele se obtêm, no campo, as informações necessárias para a adequada representação de uma determinada área da superfície terrestre. Neste capítulo, estudaremos os levantamentos topográficos planimétricos, ou seja, nos ocuparemos apenas com os procedimentos para determinar a posição de pontos no “plano topográfico”, sem preocuparmos com as altitudes desses pontos.

### 5.1 - Fundamentos do levantamento topográfico planimétrico

A finalidade básica do levantamento topográfico é obter informações que permitam descrever geometricamente determinada região da superfície terrestre. As informações obtidas no campo deverão ser capazes de possibilitar a fiel representação da área levantada, mostrando a disposição espacial dos seus elementos constituintes.

As formas de representação mais utilizadas são os desenhos em papel como plantas e mapas e, atualmente, os desenhos na tela de um computador, sendo que as unidades gráficas utilizadas nessa representação são o *ponto*, *segmentos de reta* e *polígonos*.

A escala utilizada determina quais elementos podem ser representados por cada uma das unidades gráficas. Vejamos o caso de uma planta topográfica de uma quadra residencial de uma cidade. É muito provável que, em uma escala que permita a análise e a manipulação adequada das informações contidas na planta, os *postes*, por exemplo, sejam representados por um *ponto*, as *guias de passeio* sejam representadas por *segmentos de reta* e os *edifícios* por *polígonos* (ver Figura 5.2).

Considerando que os segmentos de reta são, na realidade, definidos por dois pontos e as características geométricas de um polígono são definidas pelos seus vértices, que também são representados por pontos, pode-se dizer que os levantamentos topográficos constituem-se fundamentalmente da determinação de coordenadas de pontos na superfície da Terra, isto é, no âmbito estrito das operações de campo, constitui-se de uma sequência sistematizada de medições de ângulos e distâncias, de modo a obter as coordenadas dos pontos de interesse, de acordo com as finalidades de cada levantamento.

Cabe ao topógrafo identificar no campo quais pontos são importantes na definição dos elementos de interesse. As Figuras 5.1 e 5.2 ilustram claramente esse fato, mostrando o conjunto de pontos iniciais que deu origem aos polígonos, segmentos de retas e pontos utilizados para representar os elementos de interesse, neste caso edificações, guias de passeio e postes de iluminação.

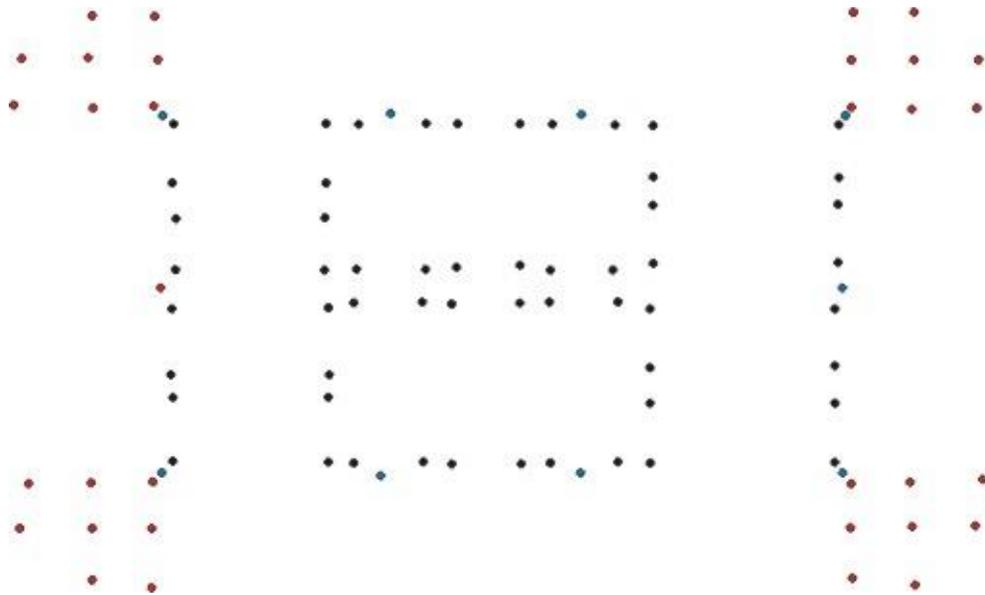


Figura 5.1 – Pontos levantados

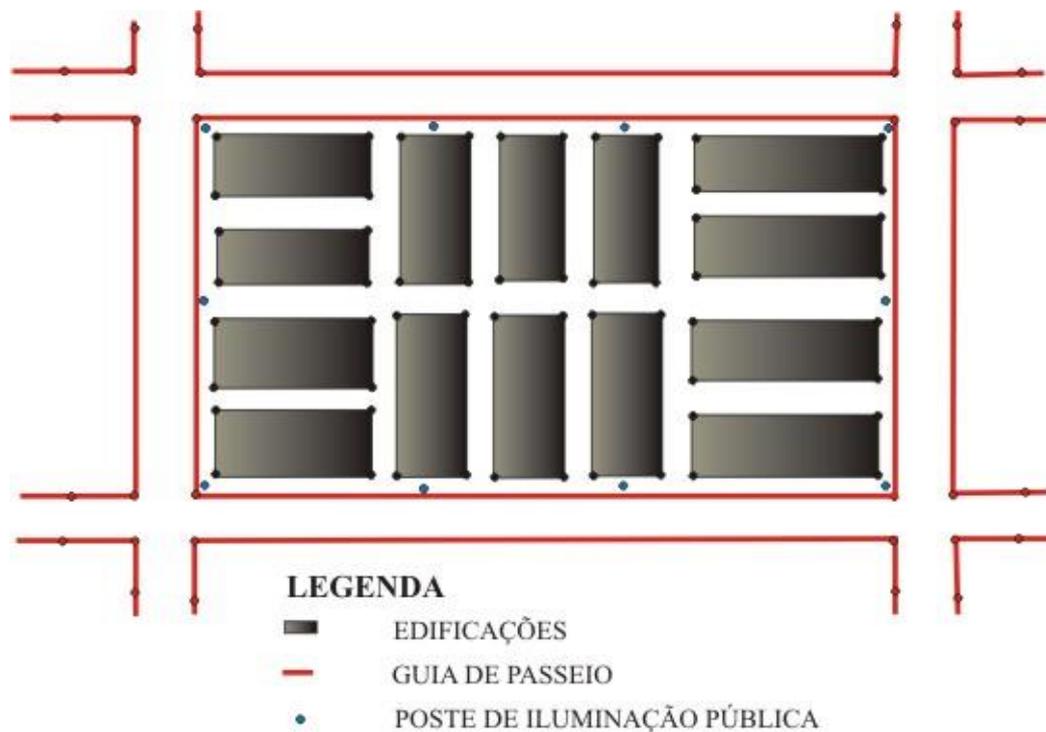


Figura 5.2 – Representação dos elementos de interesse a partir dos pontos levantados

Determinar a posição (coordenadas) de um ponto na superfície terrestre significa relacioná-lo (referenciá-lo) a um outro ponto de posição conhecida. É preciso sempre lembrar que a posição de um ponto

é expressa por meio das suas coordenadas em um determinado sistema de referência e/ou representação previamente estabelecido. A maneira mais comum de obter a posição de um ponto no campo é medir a direção (azimute ou rumo) e o comprimento do segmento de reta, que une o ponto do qual se deseja conhecer a posição ao ponto conhecido (estação). A Figura 5.3 ilustra esse procedimento. A posição relativa do ponto “B” pode ser conhecida medindo o ângulo “;” entre segmento de reta, que une os pontos A e B, e uma direção de referência, e a distância D entre eles. Esta operação pode ser considerada a operação fundamental dos levantamentos topográficos. Outros procedimentos de campo podem ser utilizados.

As direções observadas no campo em relação a uma referência qualquer serão posteriormente referidas a um sistema de coordenadas por meio de procedimentos de cálculo adequado. A prática mais comum é efetuar o levantamento utilizando o sistema polar, isto é, medindo ângulos e distâncias no campo, transformá-las posteriormente para um sistema de coordenadas retangulares. A Figura 5.4 ilustra a obtenção dos dados de campo e a transformação para um sistema de coordenadas retangulares.

Assim, a obtenção das coordenadas de um ponto é feita a partir de um outro ponto que serve de referência. Um conjunto de pontos de coordenadas conhecidas forma uma rede de referência que pode variar de alguns poucos pontos de abrangência local até grandes redes que abrangem países e continentes. Um sistema de referência ideal deve ser materializado por uma rede de abrangência global para apoiar subsistemas cada vez menores até o nível de rede local.

Os levantamentos topográficos devem estar sempre “amarrados” a uma rede de referência. O procedimento mais utilizado consiste em implantar uma “poligonal local de apoio” para o levantamento de detalhes, que deverá estar amarrada a uma rede de referência de abrangência maior.

Ao longo da história da Topografia, sempre foi comum o estabelecimento de sistemas arbitrários para apoiar os levantamentos topográficos. Tal procedimento sempre foi justificado pela dificuldade em “amarrar” os levantamentos à rede de referência geodésica brasileira, uma vez que quase sempre era necessário o transporte de coordenadas por longas distâncias, elevando os custos dos levantamentos. Com o aparecimento do sistema GPS, tornou-se mais fácil o transporte de coordenadas, não se justificando sistemas arbitrários para apoiar levantamentos.

O assunto “redes de referência” é dos mais importantes e vastos da Topografia, mas não será tratado com profundidade neste livro. Procurou-se aqui apenas apresentar o seu conceito e sua relação com os levantamentos topográficos.

## **5.2 - O levantamento topográfico segundo a NBR 13133**

A Associação Brasileira de Normas Técnicas publicou em maio de 1994 (validade a partir de 30.06.1994) a NBR 13133, que fixa as condições para a execução de levantamentos topográficos. Até então o Brasil não possuía um instrumento normativo para servir de base na especificação, execução e fiscalização dos levantamentos topográficos em geral. A NBR 13133 veio suprir essa lacuna. Assim, é necessário que todo profissional relacionado a esse campo de atividade conheça as prescrições desse importante documento

e o tenha como objeto de consulta permanente.

A NBR 13.133, no item 3.12, define levantamento topográfico como sendo o conjunto de métodos e processos que, por meio de medições de ângulos horizontais e verticais, de distâncias horizontais, verticais e inclinadas, com instrumental adequado à exatidão pretendida, primordialmente, implanta e materializa pontos de apoio no terreno, determinando suas coordenadas topográficas. A esses pontos se relacionam os pontos de detalhes, visando à sua exata representação planimétrica numa escala predeterminada e à sua representação altimétrica por meio de curvas de nível, com equidistância também predeterminada e/ou pontos cotados.

A norma especifica que os levantamentos topográficos devem cumprir, no mínimo, as seguintes fases :

- a - planejamento, seleção de métodos e aparelhagem;
- b - apoio topográfico;
- c - levantamento de detalhes;
- d - cálculos e ajustes;
- e - original topográfico;
- f - desenho topográfico final;
- g - relatório técnico.

Uma questão importante enfatizada pela norma diz respeito ao *apoio topográfico*. O ideal é que todo levantamento topográfico, para qualquer finalidade, esteja “amarrado” ao Sistema Geodésico Brasileiro (SGB) por dois pontos comuns, garantindo assim o posicionamento e a orientação do levantamento segundo um sistema global de referência. Não havendo pontos do SGB na área do levantamento, deve-se transportar para ela coordenadas de pontos próximos. Até há bem pouco tempo, o transporte de coordenadas só podia ser feito utilizando métodos geodésicos convencionais, que demandavam alta especialização e tempo, aumentando muito o custo dos levantamentos. Em vista disso, a norma aceita, em casos especiais e quando a finalidade do levantamento permitir, o estabelecimento de sistemas de referência arbitrários, podendo estar orientados, inclusive, para o Norte Magnético. Entretanto, como falamos anteriormente, o aparecimento do GPS modificou drasticamente essa situação, tornando fácil e de baixo custo o transporte de coordenadas, não se justificando mais nos dias de hoje, a não ser em casos excepcionais, a execução de levantamentos apoiados em sistemas de referência arbitrários.

### **5.3 - Métodos de levantamento de pontos**

Descreve-se, neste item, os métodos mais utilizados na determinação das coordenadas de um ponto topográfico a partir de um ou mais pontos conhecidos.

#### **5.3.1- Irradiação**

A irradiação é o procedimento mais utilizado para “amarrar” pontos de detalhes a um sistema de

referência por meio da medição de uma direção e uma distância.

Como vimos, para que todos os pontos levantados estejam no mesmo sistema de referência, será necessário efetuar o cálculo das coordenadas de um ponto a partir de outro.

Na Figura 5.3 pode-se ver que, se conhecemos as coordenadas do ponto A = (X<sub>A</sub> ; Y<sub>A</sub>), será suficiente medir no campo a distância AB (D<sub>AB</sub>) e o azimute AB (AZ<sub>AB</sub>) para que se possa calcular as coordenadas do ponto B = (X<sub>B</sub> ; Y<sub>B</sub>).

Denominamos ΔX como sendo a diferença de abcissas entre os pontos e ΔY é a diferença de ordenadas. Estas diferenças representam as projeções do alinhamento sobre os eixos cartesianos.

Da Figura 5.3 se deduz que :

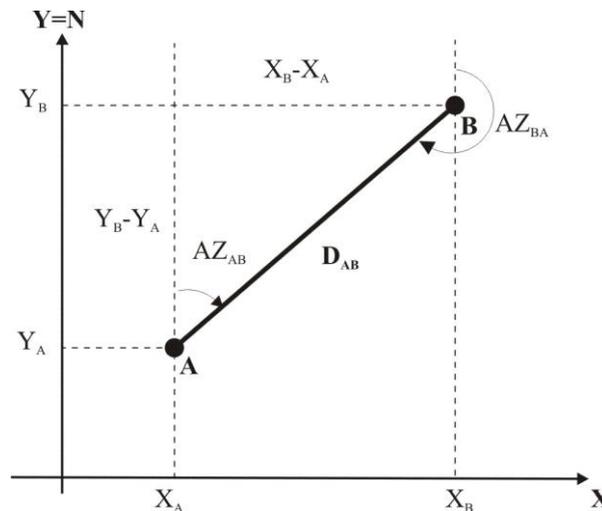
$$\begin{aligned}\Delta X_{AB} &= X_B - X_A \\ \Delta Y_{AB} &= Y_B - Y_A\end{aligned}\quad [5.1]$$

Sabendo que o triângulo formado pelo alinhamento e suas projeções ΔX e ΔY é retângulo, pode-se afirmar que:

$$\begin{aligned}\Delta X_{AB} &= D_{AB} \cdot \text{sen}(AZ_{AB}) \\ \Delta Y_{AB} &= D_{AB} \cdot \text{cos}(AZ_{AB})\end{aligned}\quad [5.2]$$

Igualando as expressões [5.1] e [5.2], resulta :

$$\begin{aligned}X_B - X_A &= D_{AB} \cdot \text{sen}(AZ_{AB}) \Rightarrow X_B = X_A + D_{AB} \cdot \text{sen}(AZ_{AB}) \\ Y_B - Y_A &= D_{AB} \cdot \text{cos}(AZ_{AB}) \Rightarrow Y_B = Y_A + D_{AB} \cdot \text{cos}(AZ_{AB})\end{aligned}\quad [5.3]$$



**Figura 5.3**

A fórmula mostra que é possível determinar as coordenadas de um ponto a partir de outro, medindo a distância entre eles e o azimute do alinhamento.

Por outro lado, se conhecemos as coordenadas dos pontos, é possível calcular a distância entre eles e

o azimute do alinhamento, que eles formam.

A distância entre dois pontos A ( $X_A, Y_A$ ) e B ( $X_B, Y_B$ ) será:

$$D_{AB} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} \quad [5.4]$$

O cálculo do azimute de um alinhamento dado pelas coordenadas de dois pontos requer, entretanto, um pouco mais de atenção, como veremos a seguir.

Convém lembrar que analiticamente uma reta fica definida quando são dadas as coordenadas de dois de seus pontos, não sendo, pois, necessária a indicação de um sentido (orientação) entre esses pontos. Um alinhamento topográfico, porém, é um segmento orientado, necessitando, pois, além das coordenadas de dois pontos (origem e extremo), a indicação do sentido (orientação) entre esses pontos. Assim, o alinhamento AB tem sentido oposto ao alinhamento BA.

Acompanhando ainda a Fig. 5.3, o azimute do alinhamento (AB) é o ângulo  $AZ_{AB}$ , e o azimute do alinhamento oposto (BA) é o ângulo  $AZ_{BA}$ , ambos contados no sentido horário, e diferem de  $180^\circ$ .

Ex.: Se azimute de AB ( $AZ_{AB}$ ) =  $50^\circ 00'00''$ , então azimute de BA ( $AZ_{BA}$ ) =  $50^\circ 00'00'' + 180^\circ = 230^\circ 00'00''$

Se (BA) =  $230^\circ 00'00''$

(AB) =  $230^\circ 00'00'' + 180^\circ = 410^\circ 00'00''$

Como os ângulos devem sempre variar de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ , ao ângulo (AB) deve ser diminuída uma volta completa:

$410^\circ 00'00'' - 360^\circ 00'00'' = 50^\circ 00'00''$

A fórmula que permite calcular o azimute de um alinhamento AB é:

$$AZ_{AB} = \arctan\left(\frac{X_B - X_A}{Y_B - Y_A}\right) \quad [5.5]$$

Para um mesmo valor da tangente existem dois ângulos correspondentes. Se positivo, o ângulo será do I ou III quadrantes trigonométricos; se negativo, será do II ou IV quadrantes trigonométricos (diferença de  $180^\circ$ ).

Notar que o numerador e o denominador da Fórmula [5.5] podem ser positivos ou negativos. Para evitar erros de interpretação do ângulo ( $\alpha$ ) fornecido pela calculadora eletrônica, é útil acompanhar a tabela 5.1.

Tabela 5.1

Quadrante	$\Delta X_{AB}$	$\Delta Y_{AB}$	(AB)
I NE	+	+	$\alpha$
II SE	+	-	$\alpha + 180^\circ$
III SW	-	-	$\alpha + 180^\circ$
IV NW	-	+	$\alpha + 360^\circ$

5.3.2- Estação Livre

Existem casos nos quais é impossível estacionar o instrumento sobre um ponto de coordenadas conhecidas, a partir do qual se pretende determinar as coordenadas de outro. Neste caso, pode-se utilizar o método da Estação Livre, ou seja, deve-se estacionar o aparelho no ponto que se deseja determinar as coordenadas e efetuar as visadas para outros dois pontos de coordenadas conhecidas.

Além de efetuar a leitura do ângulo ( $\alpha$ ), é necessário medir a distância ( $D_{EA}$ ) que vai do ponto conhecido ao novo ponto (Figura 5.4).

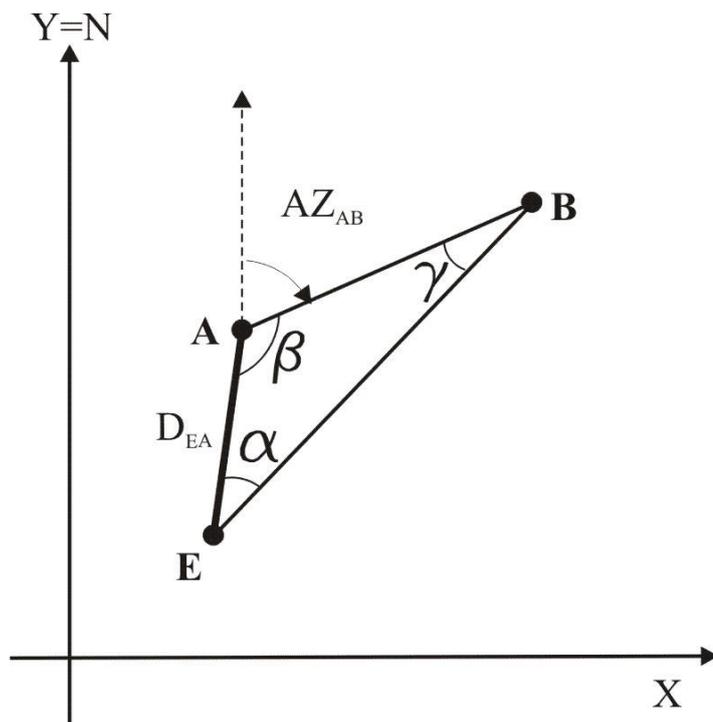


Figura 5.4

Dados :

$A = (X_A, Y_B)$

$B = (X_B, Y_B)$

Mede-se a distância  $D_{EA}$  e o ângulo  $\alpha$

Determina-se  $\mathbf{E} = (X_E, Y_E)$

Cálculos:

1 - Determinar o azimute  $AZ_{AB}$ . Utilizar a equação [5.5].

2 - Determinar a distância  $D_{AB}$ . Usar a equação [5.4].

3 - Determinar  $(AZ_{AE})$ :

$$\frac{\text{sen } \alpha}{D_{AB}} = \frac{\text{sen } \gamma}{D_{EA}} \quad \rightarrow \quad \gamma = \arcsen\left(\frac{D_{EA} \cdot \text{sen } \alpha}{D_{AB}}\right) \quad [5.6]$$

Sendo que:

$$\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma)$$

$$AZ_{AE} = AZ_{AB} + \beta$$

$$X_E = X_A + D_{AE} \cdot \text{sen}(AZ_{AE})$$

$$Y_E = Y_A + D_{AE} \cdot \text{cos}(AZ_{AE}) \quad [5.7]$$

### 5.3.3- Interseção

Há casos nos quais existem limitações para determinar distâncias. Uma maneira de contornar esse problema é efetuar uma interseção de visadas a partir de dois pontos de coordenadas conhecidas, conforme mostra a Figura 5.5.

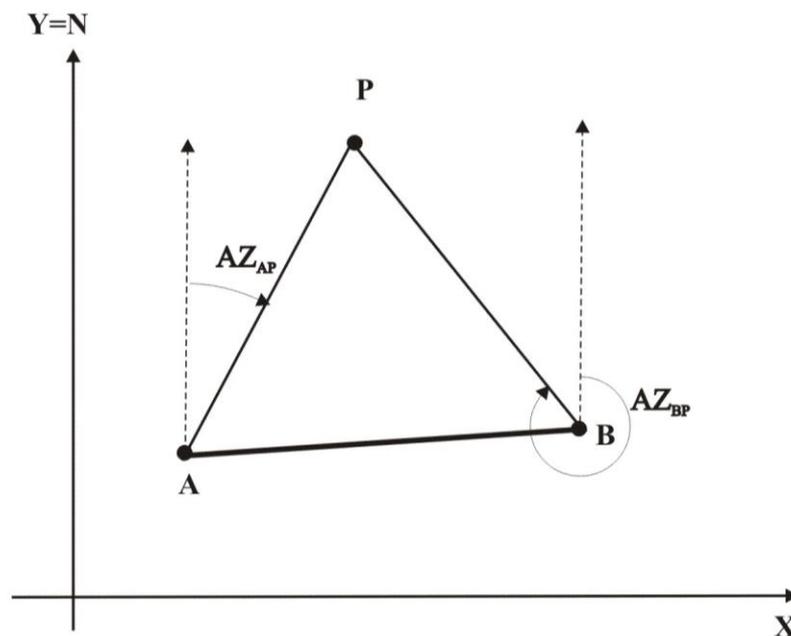


Figura 5.5

Dados :  $\mathbf{A} = (X_A; Y_A)$

$\mathbf{B} = (X_B; Y_B)$

Medir :  $AZ_{AP}$  e  $AZ_{BP}$

Determinar :  $\mathbf{P} = (X_P, Y_P)$

$$Y_P = \frac{[X_A - Y_A \cdot \text{tg}(AZ_{AP})] - [X_B - Y_B \cdot \text{tg}(AZ_{BP})]}{\text{tg}(AZ_{BP}) - \text{tg}(AZ_{AP})} \quad [5.8]$$

$$\begin{aligned} X_P &= X_A + (Y_P - Y_A) \cdot \text{tg}(AZ_{AP}) \\ X_P &= X_B + (Y_P - Y_B) \cdot \text{tg}(AZ_{BP}) \end{aligned} \quad [5.9]$$

Como se vê, a abscissa do ponto P ( $X_P$ ) pode ser calculada tanto a partir do ponto A quanto do ponto B. É recomendável efetuar o cálculo a partir dos dois pontos, para verificar se ambos os resultados são iguais.

#### 5.3.4- Bilateração

A bilateração é um método que, como seu próprio nome sugere, tem como base a medição de duas distâncias desde o ponto de coordenadas desconhecidas até dois pontos conhecidos, para determinar as coordenadas do primeiro.

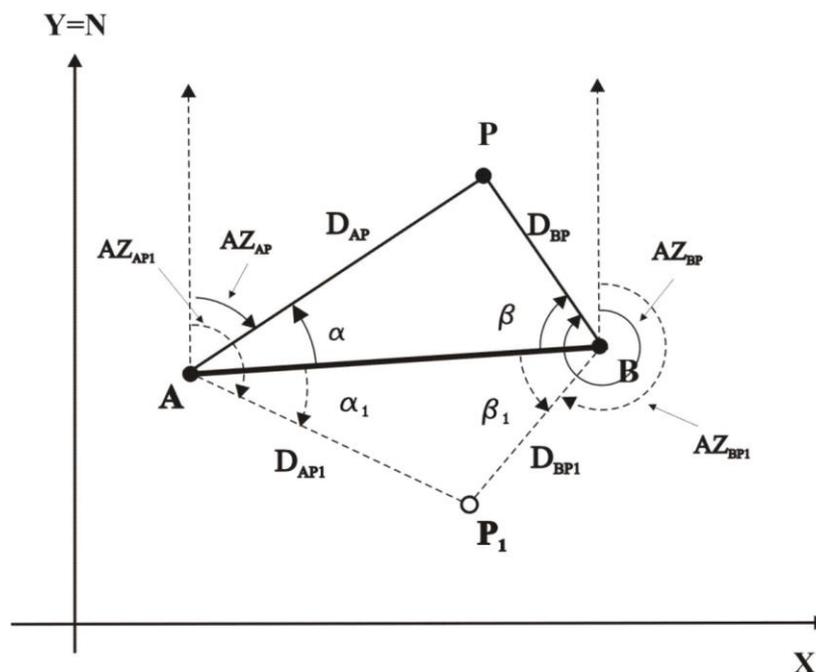


Figura 5.8

Dados :  $\mathbf{A} = (X_A, Y_A)$

$\mathbf{B} = (X_B, Y_B)$

Medir :  $D_{AP}$  e  $D_{BP}$

Determinar:

$\mathbf{P} = (X_P, Y_P)$

Cálculos:

1- determinar a distância  $D_{AB}$ .

2- calcular os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$ .

$$\cos \alpha = \frac{D_{AB}^2 + D_{AP}^2 - D_{BP}^2}{2 \cdot D_{AB} \cdot D_{AP}} \quad [5.10]$$

$$\cos \beta = \frac{D_{AB}^2 + D_{BP}^2 - D_{AP}^2}{2 \cdot D_{AB} \cdot D_{BP}} \quad [5.11]$$

3 - Azimutes :

$$\begin{aligned} AZ_{AP} &= AZ_{AB} - \alpha \\ AZ_{BP} &= AZ_{BA} + \beta \end{aligned} \quad [5.12]$$

**Atenção!!!** Dependendo da posição do ponto (P) em relação aos pontos de coordenadas conhecidas (A e B), as fórmulas para o cálculo dos azimutes se alteram. Veja, por exemplo, o caso do ponto  $P_1$  na Figura 5.6. As fórmulas para o cálculo dos azimutes serão:

$$\begin{aligned} AZ_{AP_1} &= AZ_{AB} + \alpha_1 \\ AZ_{BP_1} &= AZ_{BA} - \beta_1 \end{aligned} \quad [5.13]$$

É necessário, portanto, fazer um bom croqui na hora do levantamento para evitar enganos.

4 - Coordenadas de P :

As coordenadas do ponto P podem ser calculadas a partir do ponto A [5.14] ou a partir do ponto B [5.15].

Ambos os resultados devem ser iguais.

$$\begin{aligned} X_P &= X_A + D_{AP} \cdot \sin(AZ_{AP}) \\ X_P &= Y_A + D_{AP} \cdot \cos(AZ_{AP}) \end{aligned} \quad [5.14]$$

$$\begin{aligned} X_P &= X_B + D_{BP} \cdot \text{sen}(AZ_{BP}) \\ Y_P &= Y_B + D_{BP} \cdot \text{cos}(AZ_{BP}) \end{aligned} \quad [5.15]$$

## 5.4 - Poligonação

Uma poligonal constitui-se de uma série de alinhamentos consecutivos, dos quais a extensão e a direção são medidas no campo. O ato de estabelecer no campo os vértices de poligonais e realizar as medidas necessárias é conhecido como poligonação e tem sido o método mais utilizado para implantar um “arcabouço” de apoio para os levantamentos topográficos. A partir dos vértices da poligonal são levantados os pontos de detalhes necessários para a completa descrição da área.

As poligonais são classificadas em três tipos básicos, de acordo com a sua conformação geométrica e ligação com poligonais de ordem superior: poligonais abertas, poligonais apoiadas e poligonais fechadas.

### 5.4.1- Poligonais abertas

São poligonais que não retornam ao ponto de partida e que começam e/ou terminam em um ponto de coordenadas não-conhecidas (Figura 5.7) São geométrica e matematicamente abertas. Este tipo de poligonal deve ser evitado porque não permite a verificação dos ângulos e distâncias medidos, não existindo, portanto, a possibilidade de checar eventuais erros nos levantamentos.

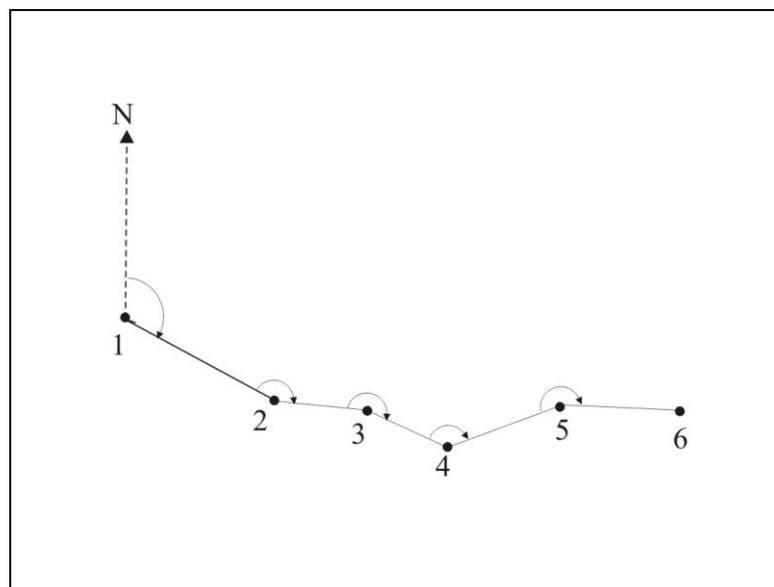
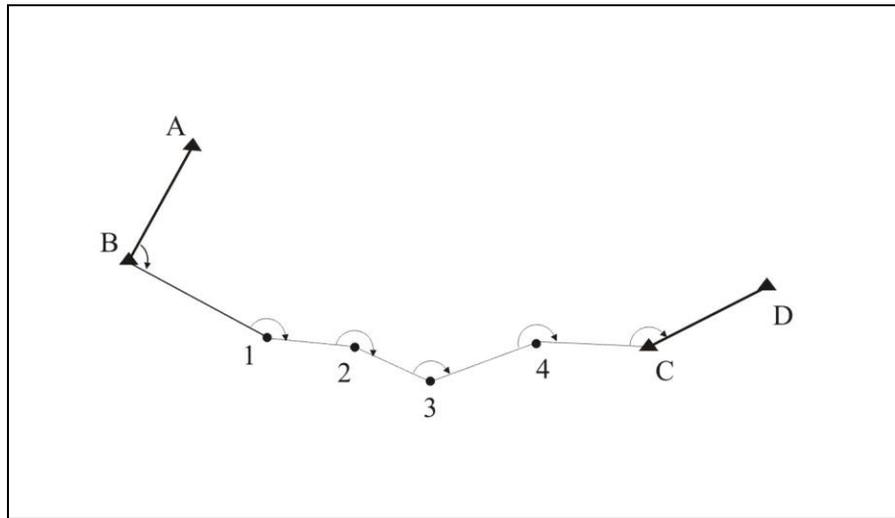


Figura 5.7

### 5.4.2- Poligonais apoiadas

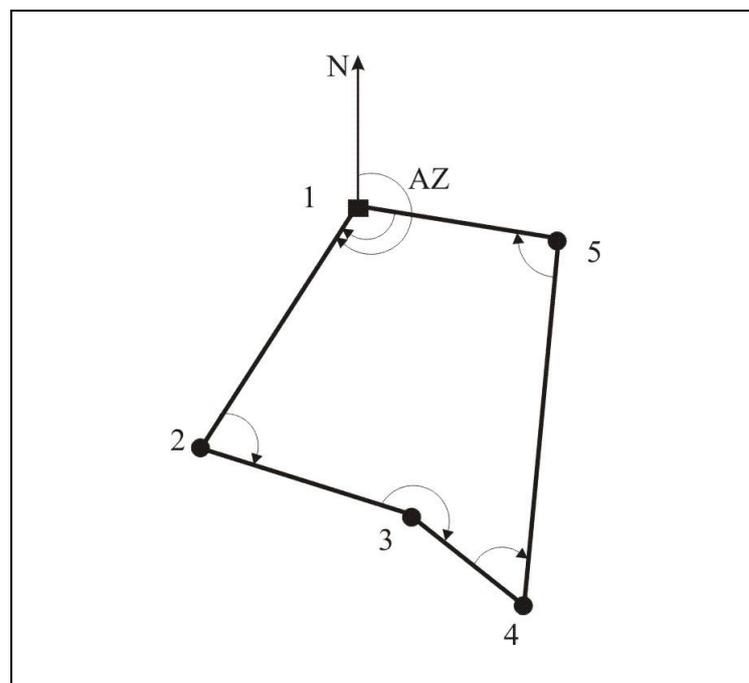
São poligonais que começam em um ponto de coordenadas conhecidas e terminam em outro ponto de coordenadas também conhecidas. São geometricamente abertas, porém matematicamente fechadas, permitindo assim a verificação dos ângulos e distâncias medidos, embora necessitem de pontos preexistentes. A Figura 5.8 apresenta uma poligonal apoiada em duas bases implantadas com GPS.



**Figura 5.10 – Poligonal apoiada**

#### 5.4.3- Poligonais fechadas

Começam e terminam em um mesmo ponto, formando uma figura fechada (Figura 5.9). São geométrica e matematicamente fechadas e por isso permitem a verificação das medidas de ângulos e distâncias efetuadas, mesmo que implantadas isoladamente, isto é, sem qualquer ligação com pontos de coordenadas conhecidas.



**Figura 5.9 – Poligonal fechada**

#### 5.4.4- Erro de fechamento angular e linear das poligonais

As poligonais fechadas e apoiadas permitem a verificação das medidas angulares, uma vez que as condições de fechamento angular para essas poligonais são conhecidas.

Da geometria pode-se demonstrar as seguintes igualdades:

$$\sum ai = (n - 2)180^0 \quad [5.16]$$

$$\sum ae = (n + 2)180^0 \quad [5.17]$$

$$\sum ah = Az_{fin} - Az_{ini} \quad [5.18]$$

$$\sum d = \pm 360^0 \quad [5.19]$$

onde:

$\sum ai$  = Soma dos ângulos internos de uma poligonal fechada.

$\sum ae$  = Soma dos ângulos externos de uma poligonal fechada.

$\sum ah$  = Soma dos ângulos horários de uma poligonal aberta.

$Az_{in}$  = Azimute inicial de uma poligonal apoiada.

$Az_{fin}$  = Azimute final de uma poligonal apoiada.

$\sum d$  = Soma algébrica das deflexões. As deflexões à direita recebem o sinal (+) e as deflexões à esquerda o sinal(-).

Na prática, as condições acima quase sempre não são atendidas, existindo uma pequena diferença chamada de erro de fechamento angular, ocasionado pelo acúmulo de erros aleatórios nas medidas angulares. A tolerância para o erro varia de acordo com as precisões requeridas em cada levantamento e são regulamentadas pela NBR 13133. Na seção 5.4.6, trataremos das tolerâncias angulares para cada classe de poligonal estabelecidas pela norma.

Definidas as direções (azimutes ou rumos) dos alinhamentos, a verificação das medidas de distâncias nas poligonais fechadas e apoiadas é feita com base nas seguintes condições:

$$\sum_{i=1}^n \Delta X_i = 0 \quad [5.20]$$

$$\sum_{i=1}^n \Delta Y_i = 0 \quad [5.21]$$

$$\sum_{i=1}^n \Delta X_i = X_{fin} - X_{ini} \quad [5.22]$$

$$\sum_{i=1}^n \Delta Y_i = Y_{fin} - Y_{ini} \quad [5.23]$$

Onde:

$\sum_{i=1}^n \Delta X_i$  é a soma das projeções no eixo leste-oeste do levantamento. Tal como foi demonstrado, o  $\Delta X$  de cada lado da poligonal é calculado multiplicando o comprimento do alinhamento pelo *seno* do seu azimute (Equação 5.2).

$\sum_{i=1}^n \Delta Y_i$  é a soma das projeções no eixo norte-sul do levantamento. De forma similar,  $\Delta Y$  é calculado multiplicando o comprimento do alinhamento pelo *coseno* do seu azimute.

$X_{ini}$  = coordenada X ( eixo leste-oeste do levantamento) do ponto de apoio inicial.

$Y_{ini}$  = coordenada Y ( eixo norte-sul do levantamento) do ponto de apoio inicial.

$X_{fin}$  = coordenada X ( eixo leste-oeste do levantamento) do ponto de apoio final.

$Y_{fin}$  = coordenada Y ( eixo norte-sul do levantamento) do ponto de apoio final.

Assim como no caso das medidas angulares, as condições acima quase sempre não serão atendidas por pequenas diferenças, gerando um erro na direção leste-oeste ( $\varepsilon X$ ) e um erro na direção norte-sul ( $\varepsilon Y$ ). A tolerância para o erro varia de acordo com as precisões requeridas em cada levantamento e são regulamentadas pela NBR 13133.

O erro de fechamento linear ( $\varepsilon L$ ) é definido como:

$$\varepsilon L = \sqrt{\varepsilon X^2 + \varepsilon Y^2} \quad [5.24]$$

A precisão relativa (Pr) é expressa pela razão entre o erro linear ( $\varepsilon L$ ) e comprimento total da poligonal (P):

$$\text{Pr} = \frac{\varepsilon L}{P} \quad [5.25]$$

A NBR 13133 introduz o conceito de erro de fechamento transversal (função do erro angular) e erro de fechamento longitudinal (função do erro linear) para poligonais apoiadas que possuem desenvolvimento retilíneo.

#### 5.4.5- Cálculo de poligonais e distribuição dos erros

Nesta seção, apresentar-se-ão, por meio de exemplos, todos os passos necessários para os cálculos de poligonais a partir dos dados de campo. Desta forma, o leitor poderá entender melhor e fixar os conceitos apresentados na seção anterior. Será observada a sequência de passos normalmente utilizada para o cálculo de poligonais. A Tabela 5.2 apresenta os dados de campo da poligonal fechada da Figura 5.9.

**Tabela 5.2 – Dados de campo de uma poligonal fechada**

Estação	Ponto visado	Ângulo medido	Distância
1	5 (ré) 2 (vante)	112° 00' 15"	147,048
2	1 3	75° 24' 35"	110,404
3	2 4	202° 05' 05"	72,373
4	3 5	56° 50' 10"	186,593
5	4 1	93° 40' 20"	105,441

Azimute 1-2 = 211° 58' 50"

Para os ângulos internos, a condição de fechamento angular é:  $\sum ai = (n - 2)180^\circ$ . Assim, para uma poligonal de 5 lados, a soma dos ângulos internos será  $\sum ai = (5 - 2) \cdot 180^\circ = 540^\circ$ . Neste exemplo, a soma dos ângulos medidos é 540° 00' 25" e o erro de fechamento angular será:

$$540^\circ 00' 25'' - 540^\circ 00' 00'' = 0^\circ 00' 25''$$

Este erro deve ser comparado com a tolerância em função da classe de poligonal e, atendidas as exigências, pode então ser distribuído. O erro deve ser distribuído em parcelas iguais para o número total de ângulos medidos, devendo-se considerar que a correção sempre terá sinal contrário ao sinal do erro. Neste exemplo, ele deve ser subtraído de cada observação, uma vez que a soma dos ângulos medidos (540° 00' 25") é maior do que o valor esperado (540° 00' 00").

A correção angular  $C_a$  de cada medida será:

$$C_a = \frac{25''}{5} = 5''$$

Os ângulos corrigidos são apresentados na Tabela 5.3.

**Tabela 5.3 - Ângulos corrigidos**

Estação	Ponto visado	Ângulo corrigido
1	5 (ré) 2 (vante)	112° 00' 10"
2	1 3	75° 24' 30"
3	2 4	202° 05' 00"
4	3 5	56° 50' 05"
5	4 1	93° 40' 15"

Os azimutes (Az) dos lados da poligonal são calculados a partir de um azimute inicial que pode ser obtido a partir da rede de referência geodésica ou determinado no campo, quando esta não existir. Neste exemplo, o azimute do lado 1-2 é conhecido.

Pode-se então calcular os azimutes dos outros lados em função do azimute 1-2 e dos ângulos internos medidos:

$$Az_{i+1} = Az_i + 180^0 \pm A_i \quad [5.26]$$

$Az_{i+1}$  = Azimute a ser calculado (vante).

$Az_i$  = Azimute conhecido.

$A_i$  = ângulo horário medido.

Se o resultado da expressão for negativo, deve-se somar  $360^0$ , e se for maior que  $360^0$ , deve-se subtrair  $360^0$ .

O sinal (+) deve ser usado quando o ângulo entre os alinhamentos for medido no sentido horário, a partir do alinhamento à ré; caso contrário, usa-se o sinal (-).

No exemplo tem-se:

$$Az(23) = 211^058'50'' + 180^0 + 75^024'30'' - 360^0 = 107^023'20''$$

$$Az(34) = 107^023'20'' + 180^0 + 202^005'00'' - 360^0 = 129^028'20''$$

$$Az(45) = 129^028'20'' + 180^0 + 56^050'05'' - 360^0 = 6^018'25''$$

$$Az(51) = 6^018'25'' + 180^0 + 93^040'15'' = 279^058'40''$$

$$Az(12) = 279^058'40'' + 180^0 + 112^000'10'' - 360 = 211^058'50''$$

Cálculo das projeções parciais (X e Y):

$$\begin{aligned} \Delta X_i &= d_i \text{ sen } Az_i \\ \Delta Y_i &= d_i \text{ cos } Az_i \end{aligned} \quad [5.27]$$

onde:

$d_i$  = Comprimento do alinhamento de ordem i.

$Az_i$  = Azimute do alinhamento de ordem i.

**Tabela 5.4 – Cálculo das projeções parciais**

Lado	Azimute	Distâncias	Projeções	
			$\Delta X$	$\Delta Y$
1-2	211°58'50"	147,058	-77,887	-124,739
2-3	107°23'20"	110,404	105,358	-32,995
3-4	129°28'20"	72,372	55,866	-46,007
4-5	6°18'25"	186,583	20,497	185,454
5-1	279°58'40"	105,451	-103,856	18,271
			-0,021	-0,016

O erros são:  $\varepsilon X = -0,021$  m e  $\varepsilon Y = -0,016$  m

O erro linear  $\varepsilon L = \sqrt{(-0,021)^2 + (-0,016)^2} = 0,026$  m

A precisão relativa  $Pr = \frac{0,0262}{621,868} = \frac{1}{23685} \cong \frac{1}{24000}$  (Lê-se 1 para 24000)

A distribuição do erro linear nas projeções é feita proporcionalmente ao comprimento dos lados da poligonal, isto é:

$$C(X_i) = \frac{-(\varepsilon X)}{P} \times l_i \quad [5.28]$$

$$C(Y_i) = \frac{-(\varepsilon Y)}{P} \times l_i \quad [5.29]$$

Onde:

$C(X_i)$  = Ajuste na projeção X, correspondente ao lado de ordem i.

$C(Y_i)$  = Ajuste na projeção Y, correspondente ao lado de ordem i.

$\varepsilon X$  = Erro total nas projeções X.

$\varepsilon Y$  = Erro total nas projeções Y.

$l_i$  = Lado de ordem i.

P = Perímetro da poligonal.

No nosso exemplo temos:

$$C(X_1) = \frac{-(-0,021)}{621,868} \times 147,058 \cong 0,005m$$

$$C(Y_1) = \frac{-(-0,016)}{621,868} \times 147,058 \cong 0,004m$$

As outras correções são calculadas da mesma maneira e devem ser somadas algebricamente a cada projeção. A soma dos valores corrigidos de X e Y deve ser igual a zero, podendo ocorrer pequenas diferenças resultantes de aproximações que devem ser eliminadas por meio da revisão de uma das correções. O resultado final da compensação encontra-se na Tabela 5.5.

**Tabela 5.5 – Distribuição do erro linear**

Projeções (m)		Correções (m)		Projeções Corrigidas(m)	
$\Delta X$	$\Delta Y$	$C_x$	$C_y$	$\Delta X$	$\Delta Y$
-77,887	-124,739	0,005	0,004	-77,882	-124,735
105,358	-32,995	0,004	0,003	105,362	-32,992
55,866	-46,007	0,0025	0,002	55,869	-46,005
20,497	185,454	0,006	0,005	20,503	185,459
-103,856	18,271	0,0035	0,002	-103,852	18,273
		0,021	0,016	0,000	0,000

As coordenadas definitivas de cada ponto são calculadas a partir de uma coordenada inicial, que pode ser arbitrada, embora o ideal seja que a poligonal seja amarrada a um sistema de referência geral. Neste exemplo, atribuem-se os valores  $X = 1000,000$  e  $Y = 1000,000$  para o ponto 1.

$$\begin{aligned} X_i &= X_{i-1} + \Delta X_i \\ Y_i &= Y_{i-1} + \Delta Y_i \end{aligned} \quad [5.30]$$

A Tabela 5.6 apresenta as coordenadas finais.

**Tabela 5.6 – coordenadas finais**

Estação	Projeções corrigidas		Coordenadas Finais	
	$\Delta X$	$\Delta Y$	$X$	$Y$
1			1000,000	1000,000
2	-77,882	-124,735	922,118	875,265
3	105,362	-32,992	1027,480	842,273
4	55,869	-46,005	1083,349	796,268
5	20,503	185,459	1103,852	981,727
1	-103,852	18,273	1000,000	1000,000

A seqüência de cálculo de poligonal, mostrada nas seções anteriores, pode ser reunida numa planilha única, conforme mostrado na Tabela 5.7.

Tabela 5.7 – Planilha de cálculo de poligonais

PE	PV	Âng. Medido	Âng. Corrigido	Azimute	Distância	Projeções		Correções		Coordenadas Finais		
						$\Delta X$	$\Delta Y$	$C_x$	$C_y$	X	Y	
	1									1000,000	1000,00	
1	2	112° 00' 15"	112° 00' 10"	211°58'50"	147,058	-77,887	-124,739	0,005	0,004	922,118	875,265	
2	3	75° 24' 35"	75° 24' 30"	107°23'20"	110,404	105,358	-32,995	0,004	0,003	1027,480	842,273	
3	4	202° 05'05"	202° 05'00"	129°28'20"	72,372	55,866	-46,007	0,0025	0,002	1083,349	796,268	
4	5	56° 50'10"	56° 50'05"	6°18'25"	186,583	20,497	185,454	0,006	0,005	1103,852	981,727	
5	1	93° 40'20"	93° 40'15"	279°58'40"	105,451	-103,856	18,271	0,0035	0,002	1000,000	1000,00	
					$\Sigma=540^\circ 00'25''$							
					$\gt_a=0^\circ 00'25''$	P=621,868	$\gt_X=-0,021$	$\gt_Y=-0,016$	$\Sigma=0,021$	$\Sigma=0,016$		
Erro de fechamento linear ( $\gt_L$ )		$\varepsilon L = \sqrt{(-0,021)^2 + (-0,016)^2} = 0,026 \text{ m}$				$C(X_i) = \frac{-(-0,021)}{621,868} * l_i$						
Precisão relativa		$Pr = \frac{0,0262}{621,868} = \frac{1}{23685} \cong \frac{1}{24000}$				$C(Y_i) = \frac{-(-0,016)}{621,868} * l_i$						

#### 5.4.6- Tolerâncias para o fechamento de poligonais

O estabelecimento das tolerâncias para o fechamento de poligonais pela NBR 13133 leva em consideração o tipo de poligonal, classificadas em:

Tipo 1 - Poligonais apoiadas e fechadas numa só direção e num só ponto;

Tipo 2 – Poligonais apoiadas e fechadas em direções e pontos distintos com desenvolvimento curvo;

Tipo 3 – Poligonais apoiadas e fechadas em direções e pontos distintos com desenvolvimento retilíneo.

De acordo com a norma, devido à diversidade de erros inerentes às poligonais (medições de ângulos e lados e estacionamento dos instrumentos de medição) e à difícil determinação da propagação de erros, são aceitáveis para as poligonais dos tipos 1 e 2 os métodos de compensação que consistem em efetuar primeiramente uma distribuição dos erros angulares e, em seguida, fazer uma distribuição dos erros lineares, conforme vimos nas seções 5.5.4 e 5.5.5.

As tolerâncias neste caso são:

$$T_a \leq a + b\sqrt{N} \quad [5.31]$$

$$T_p \leq c + d\sqrt{L(Km)} \quad [5.32]$$

onde:

$T_a$  = tolerância para o erro de fechamento angular.

$T_p$  = tolerância para o erro de fechamento linear.

$a$  = erro médio angular (azimute) da rede de apoio multiplicado por  $\sqrt{2}$ . Este valor fornece o erro de azimute propagado pelos dois pontos de apoio da poligonal. Para poligonais fechadas (tipo 1)  $a = 0$ .

$b$  = coeficiente que expressa a tolerância para o erro de medição dos ângulos da poligonal.

$c$  = erro médio de posição dos pontos de apoio multiplicado por  $\sqrt{2}$ . Este valor fornece o erro de posição propagado pelos dois pontos de apoio da poligonal. Para poligonais fechadas (tipo 1)  $c = 0$ .

$d$  = coeficiente que expressa a tolerância para o erro de fechamento linear em m/km de desenvolvimento da poligonal, somente aplicável às poligonais dos tipos 1 e 2.

$N$  = número de vértices.

$L$  = extensão da poligonal em Km.

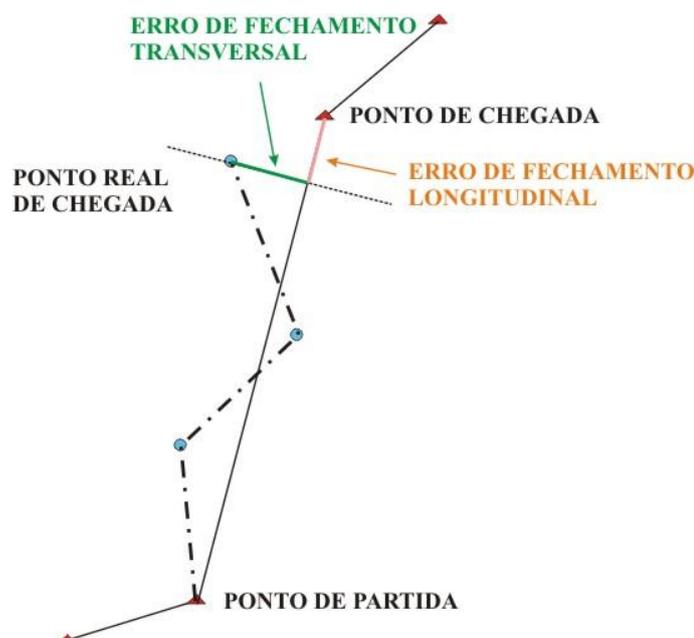
A Tabela 5.8 mostra os valores dos coeficientes  $b$  (poligonais dos tipos 1, 2 e 3) e  $d$  (poligonais 1 e 2) para as diferentes classes de poligonal, de acordo com a NBR 13133.

**Tabela 5.8 – Tolerâncias para poligonais do tipo 1 e 2**

Classe da Poligonal	b (seg)	d (m)
I P	6''	0,10
II P	15''	0,30
III P	20''	0,42
IV P	40''	0,56

Nas poligonais do tipo 3, normalmente empregadas em redes básicas urbanas e em projetos viários, o desenvolvimento retilíneo permite a avaliação dos erros de fechamento transversal (função do erro angular) e de fechamento longitudinal (função do erro linear). Neste caso, podem ser aplicados quaisquer métodos de ajustamento. Não trataremos aqui de métodos de ajustamento de poligonais por fugir do escopo deste livro. O leitor deverá buscar literatura específica sobre o assunto.

Segundo a NBR 13133, os valores dos fechamentos transversal e longitudinal são obtidos ligando o ponto de partida ao ponto de chegada da poligonal. O erro de fechamento longitudinal que está nessa reta é o segmento entre o ponto de chegada e a interseção de perpendicular baixada sobre ela a partir do ponto real de chegada. O erro de fechamento transversal é o segmento da perpendicular baixada do ponto real de chegada até a sua interseção com a reta que une os pontos de partida e de chegada (Figura 5.10). Estes erros são componentes do erro de fechamento linear e destacam a qualidade das medições angulares e de distâncias de uma poligonal, enquanto os erros de fechamento linear em coordenadas são apenas indicadores da divergência linear no sistema de coordenadas cartesianas x e y. Estes erros podem ser obtidos gráfica ou analiticamente.

**Figura 5.10 – Erros transversal e longitudinal em poligonal do tipo 3**

Apresenta-se a seguir uma metodologia de cálculo analítico dos erros transversal e longitudinal com base nos valores das coordenadas do ponto de chegada (PC) e do ponto real de chegada (PRC). Quatro situações distintas podem ocorrer de acordo com a posição relativa desses dois pontos ( figura 5.11).

Situação 1 (Figura 5.11a):

$$\Delta X(+)$$

$$\Delta Y(+)$$

$$AZ_p = AZ_{pc} - 90^\circ \quad [5.33]$$

$$\alpha = AZ_p - AZ_c \quad [5.34]$$

$$Tr = D \cdot \cos \alpha \quad [5.35]$$

$$Lg = D \cdot \sen \alpha \quad [5.36]$$

Situação 2 (Figura 5.11b):

$$\Delta X(+)$$

$$\Delta Y(-)$$

$$AZ_p = AZ_{pc} - 90^\circ$$

$$\alpha = AZ_c - AZ_p \quad [5.37]$$

$$Tr = D \cdot \cos \alpha$$

$$Lg = D \cdot \sen \alpha$$

Situação 3 (Figura 5.11c):

$$\Delta X(-)$$

$$\Delta Y(+)$$

$$AZ_p = AZ_{pc} + 90^\circ \quad [5.38]$$

$$\alpha = AZ_c - AZ_p$$

$$Tr = D \cdot \cos \alpha$$

$$Lg = D \cdot \sen \alpha$$

Situação 4 (Figura 5.11d):

$$\Delta X(-)$$

$$\Delta Y(-)$$

$$AZ_p = AZ_{pc} + 90^\circ$$

$$\alpha = AZ_p - AZ_c$$

$$Tr = D \cdot \cos \alpha$$

$$Lg = D \cdot \sen \alpha$$

onde: Tr = Erro transversal.

Lg = Erro longitudinal.

$\Delta X$  = Diferença entre a coordenada X do ponto real de chegada e o ponto de chegada da poligonal.  
 $\Delta Y$  = Diferença entre a coordenada Y do ponto real de chegada e o ponto de chegada da poligonal.  
 $AZ_p$  = Azimute da perpendicular à linha que une o ponto de partida ao ponto de chegada da poligonal. Esta perpendicular passa pelo ponto real de chegada.  
 $AZ_c$  = Azimute da linha que une o ponto real de chegada ao ponto de chegada. É calculado com base nas suas coordenadas.  
 $AZ_{pc}$  = Azimute da linha que une o ponto de partida ao ponto de chegada.

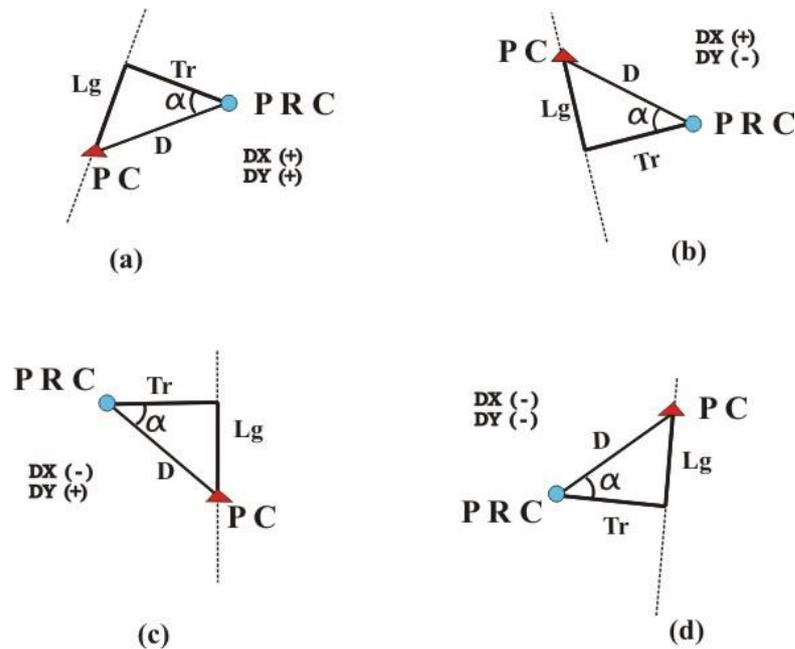


Figura 5.11 – Elementos para o cálculo dos erros transversal e longitudinal

As tolerâncias estabelecidas pela NBR 13133 para os erros longitudinal e transversal são os seguintes:

$$T_t \leq c + eL(km)\sqrt{N-1} \tag{5.39}$$

$$T_l \leq c + f\sqrt{L(Km)} \tag{5.40}$$

onde:

$T_t$  = tolerância para o erro de fechamento transversal.

$T_l$  = tolerância para o erro de fechamento longitudinal.

$c$  = erro médio de posição dos pontos de apoio de ordem superior multiplicado por  $\sqrt{2}$  (por serem dois os pontos de apoio).

$e$  = coeficiente que expressa a tolerância para o erro transversal acarretado pelo erro da medição angular de um lado médio poligonal.

$f$  = coeficiente que expressa a tolerância para o erro longitudinal acarretado pelo erro da medição linear de um lado médio poligonal.

$N$  = Número de vértices da poligonal, incluindo os de partida e de chegada.

$L$  = Extensão da poligonal (soma dos lados).

Os valores para os coeficientes “ $e$ ” e “ $f$ ”, estabelecidos pela norma de acordo com as classes de poligonais, estão apresentados na Tabela 5.9.

**Tabela 5.9 – Tolerâncias para poligonais do tipo 3**

<b>Classe da Poligonal</b>	<b>b (seg)</b>	<b>e (m)</b>	<b>f (m)</b>
I P	6	0,02	0,04
II P	15	0,04	0,12
III P	20	0,06	0,15
IV P	40	0,11	0,17

### 5.5 - Avaliação de áreas

A avaliação de áreas é uma parte muito importante da Topografia. Na engenharia em geral, geografia, cartografia, agricultura e várias outras áreas, grande parte dos procedimentos relativos a estudos, projetos, dimensionamento, avaliações e análises diversas dependem do cálculo de áreas.

Na Topografia quase sempre trabalhamos com pequenas partes da superfície terrestre e a área a ser calculada é sempre a sua projeção no plano topográfico.

Existem vários métodos para determinar áreas, e para fins de classificação, podem ser agrupados de diversas maneiras, de acordo com os critérios utilizados pelos diferentes autores. Aqui os dividiremos em dois grandes grupos: o primeiro, no qual as medidas utilizadas no cálculo da área são obtidas diretamente no campo (métodos não-gráficos) e o segundo, onde as medidas utilizadas no cálculo são obtidas graficamente por meio do desenho em escala da parcela da qual se deseja conhecer a área (métodos gráficos). É necessário salientar, que embora as medidas sejam obtidas graficamente em plantas e mapas, elas dependem originalmente dos dados de campo.

A importância da distinção entre os métodos não-gráficos e métodos gráficos reside no fato de que os primeiros são normalmente mais precisos por utilizar medidas de campo, enquanto os métodos gráficos dependem da precisão de plantas e mapas (escala) e como as medidas são obtidas nos mapas.

Descrevem-se a seguir os principais métodos de avaliação de áreas:

#### 5.5.1- Divisão em figuras geométricas simples

Consiste em dividir a parcela da qual se pretende conhecer a área em figuras geométricas simples, tais como triângulos, retângulos ou trapézios, cujas áreas podem ser facilmente calculadas por meio de

relações conhecidas. A soma das áreas de cada uma das figuras fornece a área total. A parcela mostrada na Figura 5.12, por exemplo, foi dividida em triângulos ( $S_1$  a  $S_5$  e  $S_9$ ) e em trapézios ( $S_6$  a  $S_8$ ). A área total pode ser calculada somando as áreas de cada triângulo e de cada trapézio individualmente. No cálculo da área dos triângulos pode-se utilizar a equação:

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad [5.41]$$

onde:

$$s = (a + b + c) / 2$$

$a, b, c$  = lados do triângulo.

As medidas dos lados de cada triângulo podem ser obtidas diretamente no campo ou mesmo graficamente a partir do desenho (planta) da parcela em uma determinada escala, sendo que a precisão alcançada dependerá dos erros inerentes a cada processo, isto é, da precisão das medidas obtidas no campo ou da precisão da escala da planta.

O cálculo das áreas  $S_6$  a  $S_8$  pode ser efetuado medindo as bases e alturas de cada trapézio.

O leitor deve estar atento ao fato de que as figuras contíguas a limites irregulares, como é o caso das áreas  $S_5$  a  $S_9$  na Figura 5.12, são aproximações de figuras geométricas simples, acarretando, portanto, imprecisões no valor da área.

O cálculo de área por divisão em figuras geométricas simples foi muito utilizado no passado devido à simplicidade de cálculo, mas caiu em desuso depois do aparecimento das calculadoras eletrônicas e dos computadores. Atualmente utiliza-se quase sempre o método analítico, a partir das coordenadas cartesianas dos vértices da parcela.

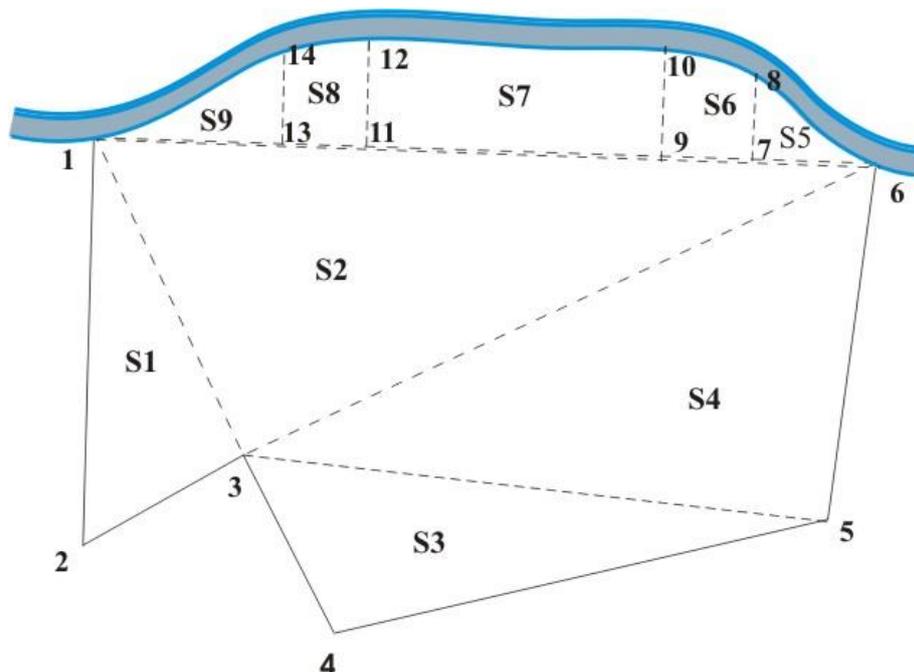


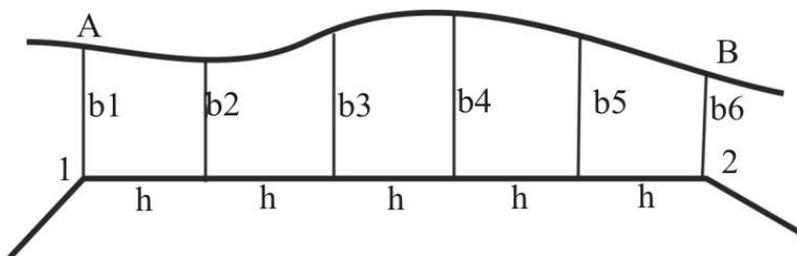
Figura 5.12 – Divisão em figuras geométricas simples

**5.5.2- Offsets a partir de um alinhamento de referência**

Este método pode ser útil no cálculo de áreas de parcelas com limites irregulares, que ocorrem com muita frequência como áreas extrapolygonais nos levantamentos topográficos, normalmente nos limites de estradas, rios etc. Consiste em dividir a parcela em trapézios, utilizando um alinhamento de referência a partir do qual são medidos “offsets”<sup>1</sup> que se constituirão nas bases dos trapézios. A distância entre os “offsets” pode ser fixa (Figura 5.13) ou variável (Figura 5.14). Quanto menor a distância entre “offsets”, maior será a precisão obtida.

O procedimento de cálculo para o caso de distâncias iguais entre os “offsets” é apresentado a seguir. Seja a figura 5.15. A área extrapolygonal 1-A-B-2 pode ser calculada pela fórmula[5.42].

$$ÁREA = h\left(\frac{b_1}{2} + b_1 + b_2 + \dots + \frac{b_n}{2}\right) \tag{5.42}$$

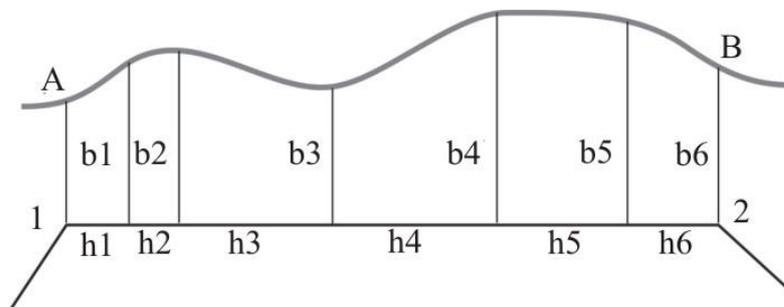


**Figura 5.13 - Cálculo de área extrapolygonal com offsets igualmente espaçados**

Esta fórmula é conhecida na literatura como fórmula dos trapézios ou fórmula de Bezout. Existem outras fórmulas utilizadas no cálculo de áreas extrapolygonais, tais como as de Simpson e Poncelet. As deduções dessas fórmulas podem ser obtidas na referência [10] (ver referências bibliográficas).

No caso de afastamentos diferentes entre os “offsets” (Fig. 5.16), a fórmula para o cálculo da área será:

$$ÁREA = \frac{1}{2}[h_0(b_0 + b_1) + h_1(b_1 + b_2) + \dots + h_{n-1}(b_{n-1} + b_n)] \tag{5.43}$$



**Figura 5.14 – Cálculo de área extrapolygonal com espaçamento variável entre offsets**

<sup>1</sup> A expressão de língua inglesa “offset” é usada aqui para representar o afastamento de um ponto em relação a um determinado alinhamento de referência

### 5.5.3- Cálculo analítico da área a partir das coordenadas cartesianas dos vértices

Neste caso, é necessário conhecer as coordenadas de todos os vértices definidores da área a ser calculada. O método analítico pode ser usado em qualquer situação e a fórmula utilizada para o cálculo da área pode ser facilmente deduzida, como veremos a seguir.

A figura 5.15 apresenta um polígono de coordenadas X e Y dos vértices, conhecidos, do qual se calcula a área.

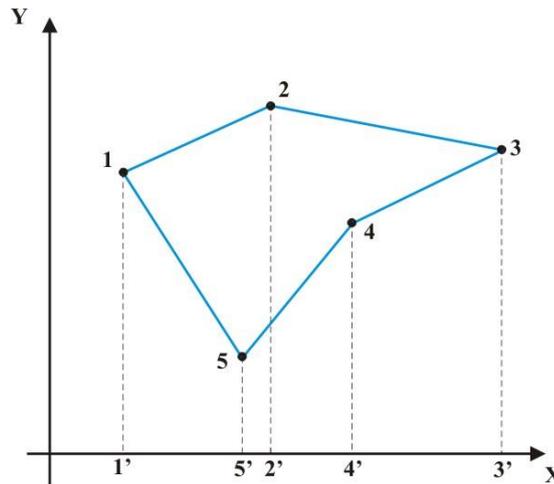


Figura 5.15

Identificam-se facilmente os trapézios (122'1'), (233'2'), (155'1'), (5 4 4'5') e (433'4').

A área do polígono ( $ÁREA_{(12345)}$ ) pode ser calculada por:

$$ÁREA_{(12345)} = ÁREA_{(122'1')} + ÁREA_{(233'2')} - ÁREA_{(155'1')} - ÁREA_{(544'5')} - ÁREA_{(433'4')}$$

Expressando a área de cada trapézio em função das coordenadas dos vértices, temos:

$$ÁREA_{(12345)} = \frac{y_1+y_2}{2}(x_2-x_1) + \frac{y_2+y_3}{2}(x_3-x_2) - \frac{y_3+y_4}{2}(x_3-x_4) - \frac{y_4+y_5}{2}(x_4-x_5) - \frac{y_5+y_1}{2}(x_5-x_1)$$

ou

$$ÁREA_{(12345)} = \frac{y_1+y_2}{2}(x_2-x_1) + \frac{y_2+y_3}{2}(x_3-x_2) + \frac{y_3+y_4}{2}(x_4-x_3) + \frac{y_4+y_5}{2}(x_5-x_4) + \frac{y_5+y_1}{2}(x_1-x_5)$$

Generalizando para um polígono de n lados, temos:

$$ÁREA = \frac{y_1+y_2}{2}(x_2-x_1) + \frac{y_2+y_3}{2}(x_3-x_2) + \dots + \frac{y_{n-1}+y_n}{2}(x_n-x_{n-1}) + \frac{y_n+y_1}{2}(x_1-x_n)$$

ou

$$ÁREA = \frac{1}{2}[(y_1+y_2)(x_2-x_1) + (y_2+y_3)(x_3-x_2) + \dots + (y_{n-1}+y_n)(x_n-x_{n-1}) + (y_n+y_1)(x_1-x_n)] \quad [5.44]$$

A expressão [5.44] é conhecida como fórmula de Gauss e calcula a área de qualquer polígono a

partir das coordenadas cartesianas dos seus “n” vértices.

O cálculo analítico de área pode ser sistematizado em folha apropriada. A repetição do procedimento com a inversão nos eixos permite conferir a exatidão nos cálculos, uma vez que o valor encontrado será o mesmo exceto o sinal algébrico, que ficará invertido. Um exemplo é dado a seguir na Tabela 5.10.

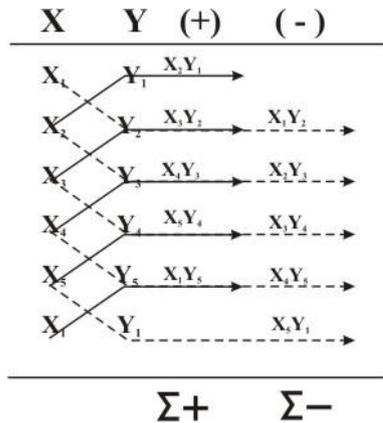
**Tabela 5.10 – Cálculo analítico de área**

Ponto	X	Y	$\Delta X$	$\Sigma Y$	$\Delta X \Sigma Y$	$\Delta Y$	$\Sigma X$	$\Delta Y \Sigma X$	
1	137,69	206,88							
2	257,17	261,88	119,48	468,76	56007,44	394,86	55,00	21717,30	
3	446,13	225,50	188,96	487,38	92095,32	703,30	-36,38	-25586,05	
4	324,11	165,42	-122,02	390,92	-47700,10	770,24	-60,08	-46276,02	
5	234,29	54,57	-89,82	219,99	-19759,50	558,40	-110,85	-61898,64	
1	137,69	206,88	-96,6	261,45	-25256,10	371,98	152,310	56656,274	
				$\Sigma$	55387,14			$\Sigma$	-55387,14
					55387,14 / 2				-55387,14 / 2
AREA =					27693,57				27693,57

Se desenvolvermos a equação (neste exemplo para  $n = 5$ ), chegaremos à equação [5.45]:

$$2(AREA) = X_2Y_1 - X_1Y_2 + X_3Y_2 - X_2Y_3 + X_4Y_3 - X_3Y_4 + X_5Y_4 - X_4Y_5 + X_1Y_5 - X_5Y_1 \quad [5.45]$$

A equação acima é facilmente memorizada e o cálculo da área efetuado de maneira simples por meio do seguinte dispositivo prático: dispõem-se as coordenadas dos pontos em duas colunas X e Y, como apresentado na Figura 5.16. As coordenadas do primeiro ponto devem ser repetidas no final. Os produtos indicados pelas setas ascendentes (linha contínua) recebem o sinal (+) e os indicados pelas setas descendentes (linha tracejada) recebem o sinal (-). A soma algébrica dos produtos ascendentes e descendentes dividida por 2 fornecerá a área do polígono.



**Figura 5.16 –Dispositivo prático para o cálculo analítico de área**

Utilizando esse dispositivo prático, o cálculo da área do polígono do exemplo ficará da seguinte forma:

**Tabela 5.11 – Cálculo analítico de área pelo método simplificado**

PONTO	X (m)	Y (m)	Xn.Y(n-1) ( + )	Xn.Y(n+1) ( - )
1	137,69	206,88	53203,33	
2	257,17	261,88	116832,52	-36058,26
3	446,13	225,5	73086,81	-57991,84
4	324,11	165,42	38756,25	-73798,82
5	234,29	54,57	7513,74	-17686,68
1	137,69	206,88		-48469,92
Σ			289392.65	-234005.52
AREA			(289392.65+ (-234005.52)) / 2 = 27693.57 m <sup>2</sup>	

**5.5.4- Planímetro polar**

Um método muito comum de avaliar áreas a partir de plantas é o do planímetro polar, um instrumento desenvolvido por Amsler em 1854. O planímetro constitui-se das seguintes partes (Figura 5.17):

braço polar de comprimento “ a ” (raio), que gira centrado em um pólo na sua extremidade;

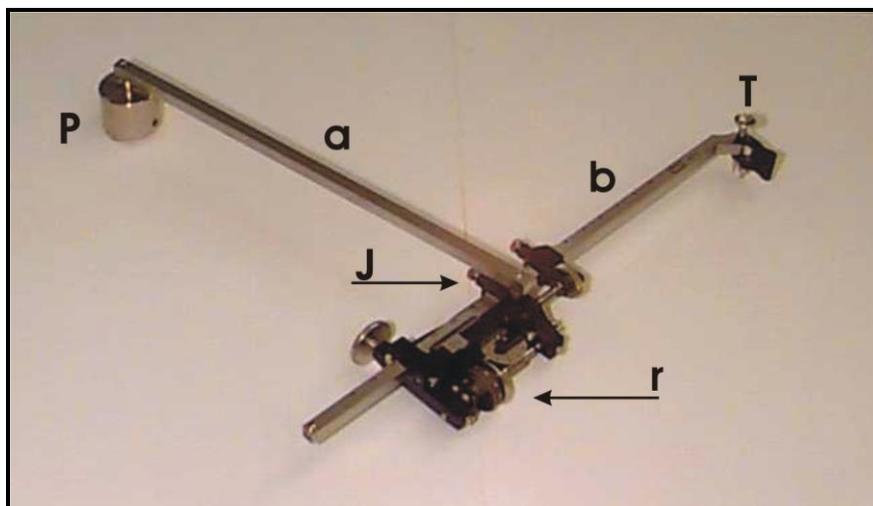
pólo de fixação (P) destinado a fixar o braço polar no papel;

braço traçador, articulado em “ j ” com o braço polar, de comprimento “ b ”;

pólo traçador (T), na extremidade do braço traçador, serve de guia para percorrer os limites da figura plana, cuja área se deseja medir;

roda medidora ou roda integrante (r), situada a uma distância do ponto de articulação entre os braços polar e traçador;

Dispositivo de registro do número de voltas da roda medidora. Pode avaliar até um milésimo de volta.



### Figura. 5.17 – Planímetro polar

O método do planímetro polar utiliza medidas de plantas ou mapas obtidas e processadas por meio de um dispositivo mecânico para fornecer a área e por isso é classificado por diferentes autores como sendo um método mecânico.

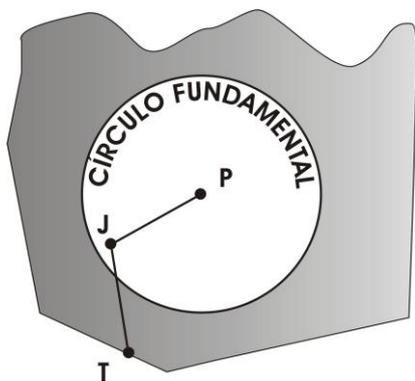
Com o pólo P fixo ao papel e percorrendo a linha de perímetro da figura com o pólo traçador, é registrado o número de voltas da roda medidora, a partir do qual pode-se deduzir a área da figura.

O pólo fixador pode ficar fora ou dentro da área a ser avaliada. A forma mais comum de utilizar o planímetro é fixar o pólo “P” fora da área a ser medida. Deve-se anotar a leitura inicial e então percorrer a linha de perímetro utilizando o pólo traçador como guia. A diferença entre as leituras final e inicial fornece o número de voltas com aproximação de até um milésimo de volta.

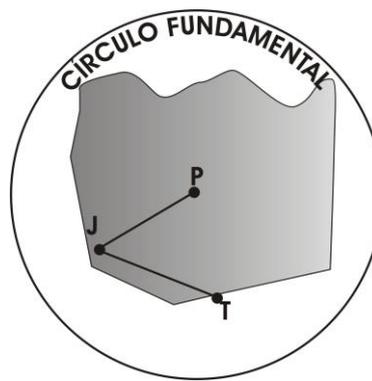
Quando a área é muito grande para ser medida com o pólo fixador fora dos seus limites, pode-se subdividi-la em áreas menores, facilitando a medição. Pode-se ainda colocar o pólo fixador dentro da área a ser avaliada (Figuras 5.18 e 5.19). Neste caso, é necessário conhecer quanto mede o círculo fundamental do planímetro. O círculo fundamental é o círculo descrito pelo pólo traçador quando os braços polar e traçador formam um ângulo de 90 graus. Nesta situação, a roda medidora descreve um movimento “normal” ao seu sentido de giro, sendo, portanto, arrastada sobre o papel, não sendo registrada nenhuma leitura. A leitura correspondente ao círculo fundamental é fornecida com o instrumento.

Quando a área a ser medida é maior do que o círculo fundamental, deve-se somar a leitura registrada pelo planímetro à leitura correspondente ao círculo fundamental, obtendo-se assim o número de voltas que será utilizado para o cálculo da área. Caso contrário, quando a área a ser medida é menor que o círculo fundamental, deve-se subtrair a leitura registrada da leitura correspondente ao círculo fundamental.

O leitor que deseja conhecer detalhadamente os fundamentos do funcionamento do planímetro poderá consultar as referências [3] e [7] listadas no final deste capítulo.



**Figura 5.18 – Pólo fixador dentro da área.  
Área maior que o círculo fundamental.**



**Figura 5.19 – Pólo fixador dentro da área.  
Área menor que o círculo fundamental.**

Existem outros métodos de avaliação de áreas, dentre os quais podemos citar: transformações

geométricas para polígonos equivalentes, métodos das quadrículas, balança de precisão, feixe de paralelas e outros. São métodos que ficaram em desuso depois do aparecimento das calculadoras e microcomputadores e por isso não serão estudados neste livro.

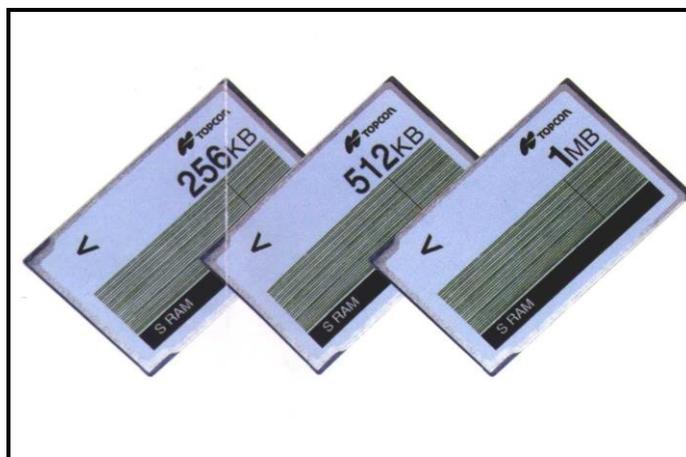
### 5.6 - *Automação dos levantamentos*

Apoiados no desenvolvimento da eletrônica e da computação nas últimas décadas, surgiram os equipamentos eletrônicos para medir ângulos e distâncias, proporcionando um grande avanço nas tecnologias de obtenção e processamento dos dados de campo.

O emprego dos distanciômetros eletrônicos viabilizou a medição de maiores distâncias com grande precisão. O aparecimento das estações totais, reunindo num único equipamento um "teodolito eletrônico e um distanciômetro eletrônico", é considerado um marco extremamente significativo em toda a história da Topografia. A utilização desses equipamentos, aliados à automação de cálculos e desenhos, permite uma alta qualidade e produtividade nos levantamentos topográficos. Neste item, descreveremos alguns pontos relacionadas à automação dos levantamentos.

#### 5.6.1- *O Registro Eletrônico dos Dados de Campo*

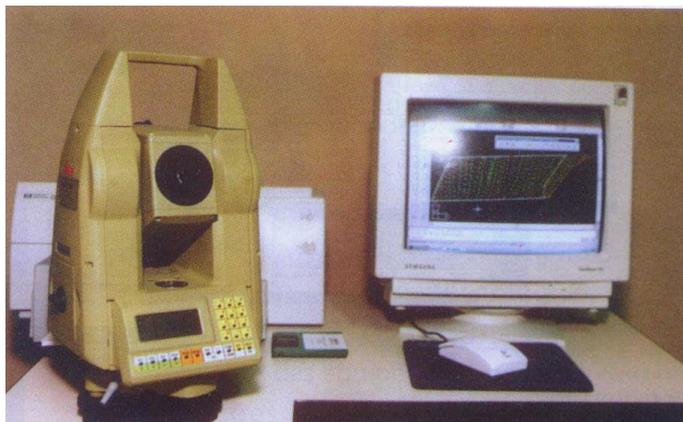
A anotação dos dados de campo sempre se constituiu numa fonte de erros grosseiros, além de contribuir para a fadiga do operador, influenciando a produtividade tanto no campo como nos trabalhos de gabinete. Os equipamentos eletrônicos permitiram um ganho significativo em termos de produtividade e qualidade ao permitir o registro eletrônico dos dados de campo. Atualmente existem três formas de registro eletrônico: no primeiro, os dados são armazenados no próprio equipamento por meio de uma memória interna própria ou removível, como cartões de memória do tipo PCMCIA (Personal Computer Memory Card International Association). Os cartões de memória PCMCIA funcionam como uma expansão de memória, tendo capacidade variável, como 256Kb, 512Kb, 1 ou 4 Mb etc. São de pequeno tamanho, facilitando o seu armazenamento e uso (Figura 5.20).



**Figura 5.20 - Cartões do tipo PCMCIA usados em Estações Totais marca Topcom**

Fonte: Catálogo Topcon.

No segundo caso, coletores externos são conectados ao equipamento e ainda é possível conectar computadores portáteis diretamente ao equipamento. No último caso, os dados observados são transferidos diretamente do equipamento de medição para o computador por meio de um cabo serial. A Figura 5.21 ilustra a transferência de dados de uma estação total para o micro.



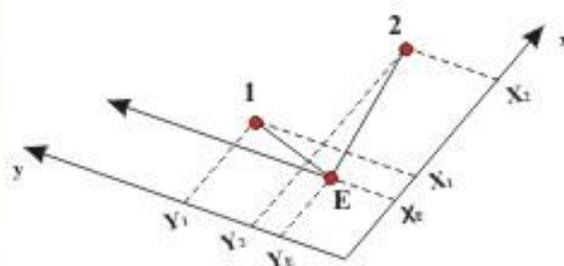
**Figura 5.21 - Transferência de dados da estação para o micro**

Fonte: Leica

**5.6.2- Funções internas de uma Estação Total**

Os programas internos das estações totais possibilitam uma alta produtividade nos trabalhos de campo. As funções mais comuns da maioria das estações totais, que permitem ao usuário realizar determinados tipos de cálculo diretamente no campo, são:

**Estação livre** – visando pelo menos dois pontos de coordenadas conhecidas, a estação calcula a coordenada do ponto ocupado. Na Figura 5.22, visando os pontos 1 e 2, de coordenadas conhecidas, a estação total fornecerá as coordenadas do ponto E.



**Figura 5.22 - Estação livre**

- **Estação conhecida** - a estação total é inicializada em um determinado sistema de referência diretamente no campo por meio da medida de um ponto a ré (A) ou pela orientação a partir de um azimute dado. Desta forma, à medida que o levantamento vai sendo realizado, a estação fornece imediatamente as coordenadas dos pontos.
- **Cálculo de áreas** – calcula a área a partir dos pontos levantados no campo ou armazenados na memória do instrumento. Conforme se vê na Figura 5.23, a área do polígono A,B,C,D é fornecida prontamente pela estação total.



Figura 5.23 - cálculo de áreas

- **Determinação de elevações remotas** – é utilizado na determinação da altitude de um ponto inacessível ao prisma. Visam-se o prisma e, em seguida, pontos do objeto na mesma vertical do prisma, medindo os ângulos verticais.
- **Locação** – permite a locação de pontos no campo a partir da medida de ângulos e distâncias ou coordenadas. O instrumento calcula, com base na posição do prisma, o deslocamento necessário para atingir a posição desejada. Como mostra a Figura 5.24, a partir da visada no ponto 1', a estação total fornece os valores do deslocamento necessários para chegar ao ponto 1.

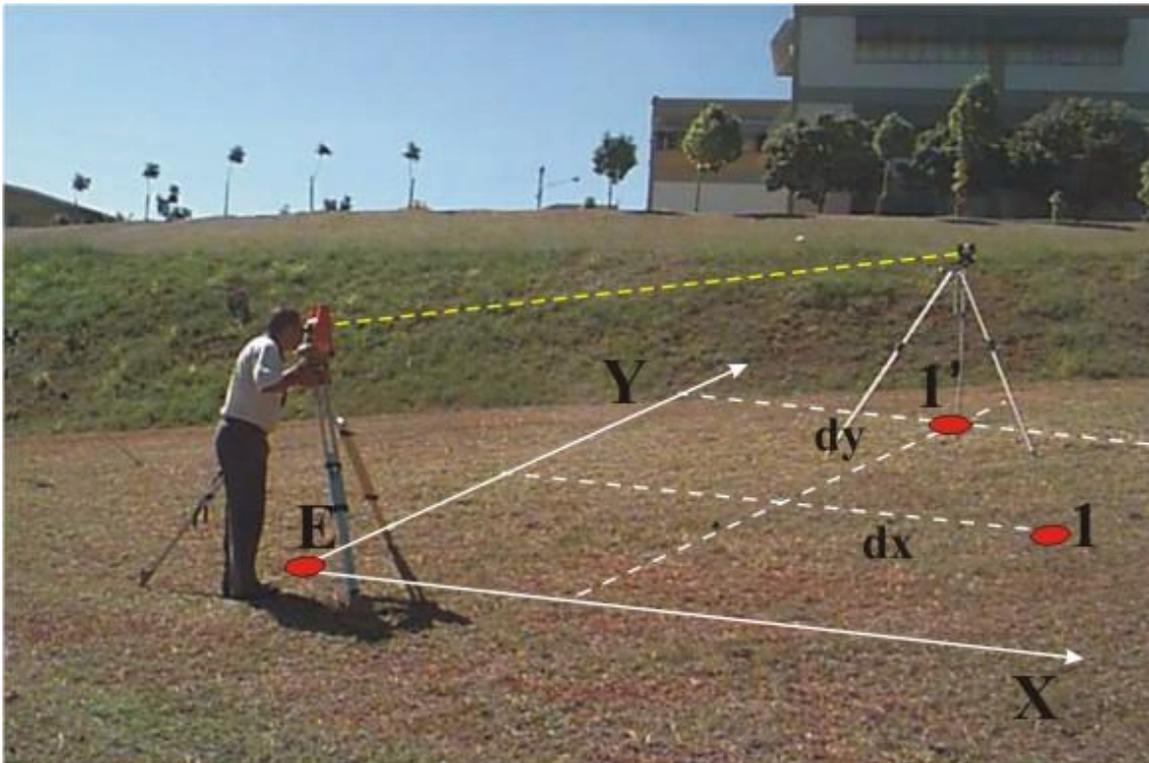


Figura 5.24 - Locação

- **Poligonais** – calcula poligonais diretamente no campo. As coordenadas de cada ponto são calculadas com base nas coordenadas do ponto anterior e das medidas efetuadas. No caso de poligonais fechadas ou apoiadas, calcula os erros de fechamento e faz o ajustamento das coordenadas.

Altura do ponto ocupado – determina a altura do ponto ocupado em função da altura de um ou mais pontos conhecidos;

### 5.6.3- Automação de cálculos e desenhos

Os softwares para Topografia existentes no mercado permitem a realização de cálculos e desenhos a partir dos dados de campo. Normalmente são divididos em módulos, cada qual responsável por um tipo de tarefa, embora possa existir uma interdependência entre eles. Embora seja uma particularidade de cada um, os programas de Topografia geralmente apresentam os seguintes módulos:

**módulo básico** - responsável pelos cálculos de poligonais e transformações entre sistemas geodésicos e conversões de coordenadas topográficas, UTM, e geográficas;

- **módulo de desenho** - permite a geração e edição de desenhos a partir dos dados de campo processados. Os programas podem possuir CAD próprios ou utilizar CADs externos, como o AutoCad, por exemplo;

- **módulo para MDT** – realiza a modelagem digital de terreno a partir dos pontos levantados;
- **aplicativos** – são módulos dedicados à tarefas específicas e variam em cada programa. Muitos programas possuem aplicativos destinados aos trabalhos que exigem cálculo de volumes a partir de seções transversais e que oferecem ferramentas para a criação de traçados horizontais e verticais para aplicação em rodovias, ferrovias, arruamentos, canais etc.

Os dados de campo podem ser introduzidos de forma manual, digitando as medições, ou a partir da transferência direta entre o instrumento de medida ou coletor de dados e o programa.

### 5.7 - Referências bibliográficas

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (1994). *NBR 13133, Execução de levantamento topográfico - procedimento*. Rio de Janeiro.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (1998). *NBR 14166, Rede de referência cadastral municipal - procedimento*. Rio de Janeiro.

DOMINGUES, F. A. A. (1979). *Topografia e Astronomia de Posição para Engenheiros e Arquitetos*. São Paulo. Editora McGraw-Hill do Brasil.

ESPARTEL, L. (1960). *Curso de topografia*. Rio de Janeiro. Globo.

HERUBIN, C. A. (1991). *PRINCIPLES OF SURVEYING*. NEW JERSEY. PRENTICE HALL.

KAHMEN, H.; FAIG, W. (1988). *SURVEYING*. BERLIN. NEW YORK. DE GRUYTER.

SCHOFIELD, W. (1993). *Engineering surveying* – Oxford. Butterworth-Heinemann Ltd.

SOUZA, G. C. (2001). *Análise de Metodologias no Levantamento de Dados Espaciais para Cadastro Urbano*. São Carlos. 110 p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo.

VEIGA, L. A. K. (2000). *Sistema para mapeamento automatizado em campo: conceitos, metodologia e implantação de um protótipo*. São Paulo. 118 p. Tese (Doutorado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.

WOLF, P. R.; BRINKER, R. C. (1994). *Elementary surveying*. New York. Harper Collins College Publishers.