VII – LEVANTAMENTOS PLANIALTIMÉTRICOS

Rodrigo Figueiredo Leandro

Muitas vezes, na engenharia, é preciso que se conheçam as coordenadas tridimensionais de um determinado ponto. Neste capítulo serão abordadas algumas técnicas para a obtenção simultânea dessas coordenadas.

Nos processos de cálculo, parte-se sempre de um ou mais pontos com coordenadas já conhecidas e de observações que os relacionem com os não-conhecidos. Como o problema envolve sempre três incógnitas [X, Y e Z], é necessário que sejam observadas pelo menos três grandezas, sejam elas distâncias ou ângulos.

As possibilidades de combinação de observações aqui descritas são:

- Dois ângulos [um ângulo vertical e um horizontal] e uma distância a partir de um ponto conhecido;

-Três ângulos [um ângulo vertical e dois horizontais] a partir de dois pontos conhecidos;

-Três distâncias a partir de três pontos conhecidos.

7.1 - Posicionamento a partir de dois ângulos e uma distância

Como foi demonstrado no Capítulo I, é possível determinar as coordenadas de um ponto topográfico a partir de outro conhecido. No caso do posicionamento espacial, é necessário também determinar a coordenada z desse ponto. Seja um ponto de coordenadas desconhecidas P0[x0, y0, z0] e outro com coordenadas conhecidas, P1[x1, y1, z1]. Digamos que foi realizada uma visada a partir de P1, visando P0 [Figura 7.1].

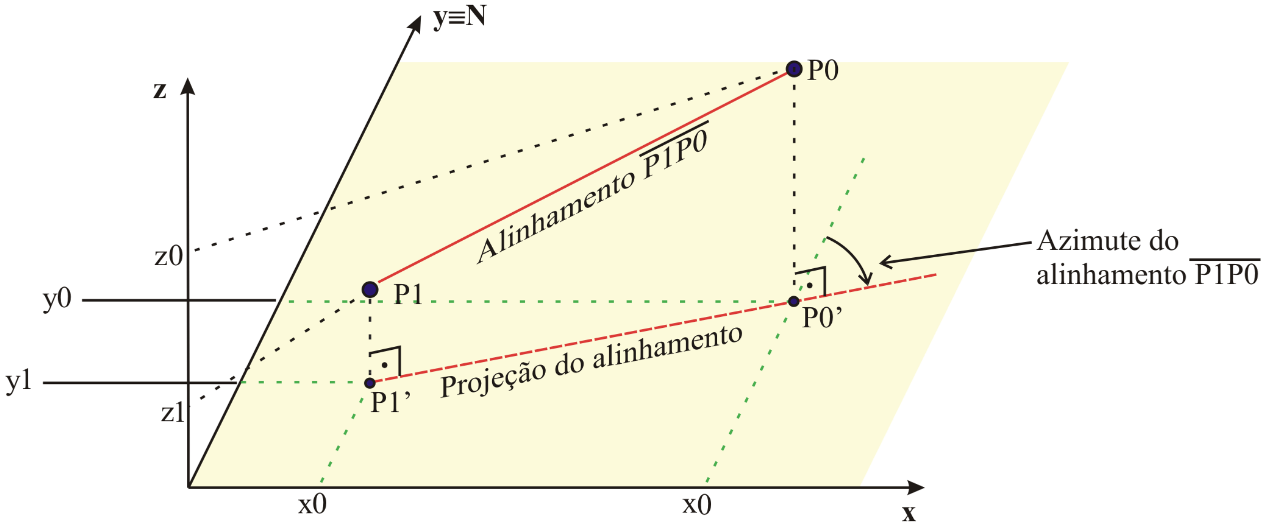

Figura 7.1 – Posicionamento a partir de dois ângulos e uma distância

De acordo com a Figura 7.2, visualizando a projeção no plano xy, teremos:

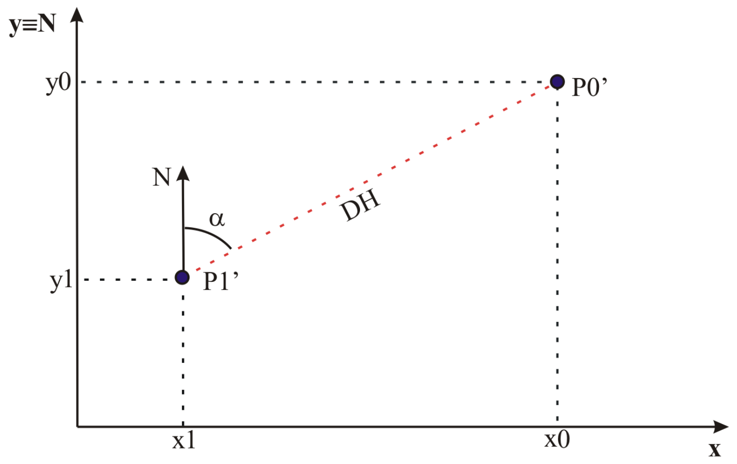

Figura 7.2 – Projeção no plano xy

onde:

α = azimute do alinhamento P1-P0;

DH = distância horizontal entre P1 eP0.

Para a determinação do azimute do alinhamento, é necessário que se tenha uma direção de referência ou um segundo ponto de coordenadas conhecidas.

Pode-se então estabelecer as seguintes relações:

$$x0 = x1 + \operatorname{sen}(\alpha) \cdot DH \qquad [7.1]$$

$$y0 = y1 + \cos(\alpha) \cdot DH \qquad [7.2]$$

Para a determinação de z0 e DH será utilizado outro plano, aqui chamado de plano γ. O plano γ é o plano paralelo ao eixo z e que contém os pontos P1 e P0 (Figura 7.3).

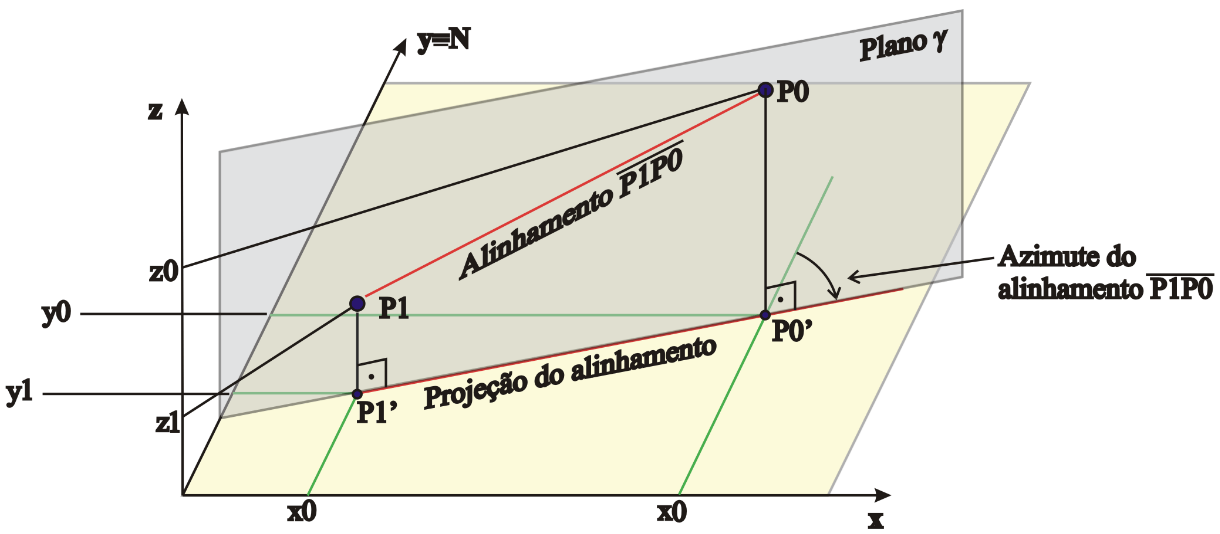

Figura 7.3 – Representação do plano γ

Analisando o plano γ, teremos:

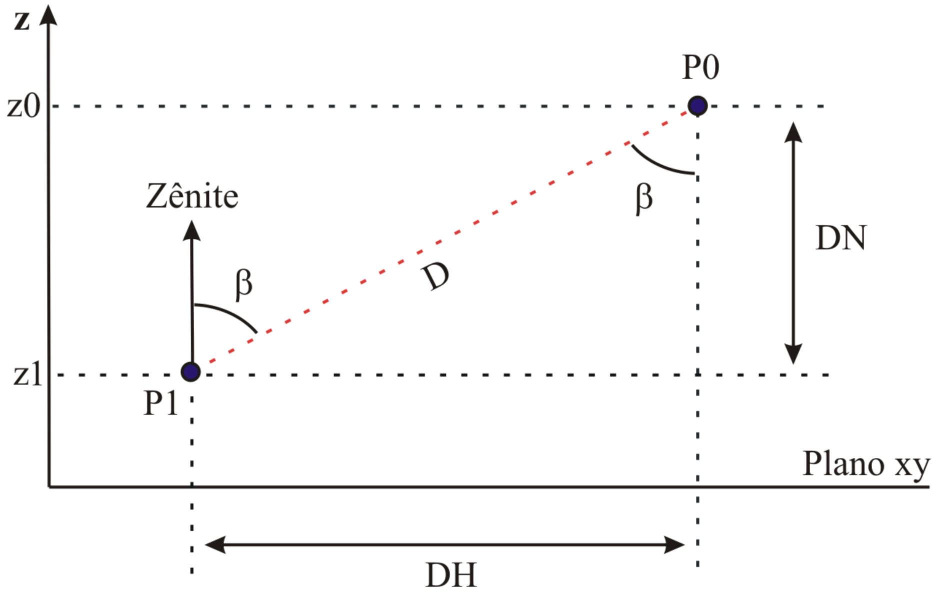

Figura 7.4 – Elementos do plano γ

onde:

D = distância inclinada entre os dois pontos;

DH = distância horizontal entre os dois pontos;

DN = diferença de nível entre os dois pontos;

β = ângulo vertical [zenital] do alinhamento.

Pode-se então determinar DH:

$$DH = D \cdot \text{sen}(\beta) \qquad [7.3]$$

De acordo com a Figura 7.4, z0 será dado por:

$$z0 = z1 + DN \qquad [7.4]$$

Sendo que:

$$DN = D \cdot \cos(\beta) \qquad [7.5]$$

Portanto, substituindo [3] em [1] e [2] e substituindo novamente [5] em [4], teremos:

$$x0 = x1 + D \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\beta) \qquad [7.6]$$

$$y0 = y1 + D \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \qquad [7.7]$$

$$z0 = z1 + D \cdot \cos(\beta) \qquad [7.8]$$

7.2 - Posicionamento a partir de três ângulos

Seja um ponto de coordenadas desconhecidas P0[x0, y0, z0] e dois pontos com coordenadas conhecidas, P1[x1, y1, z1] e P2[x2, y2, z2]. Digamos que foram realizadas visadas de P1 e P2 até P0 (Figura 7.5).

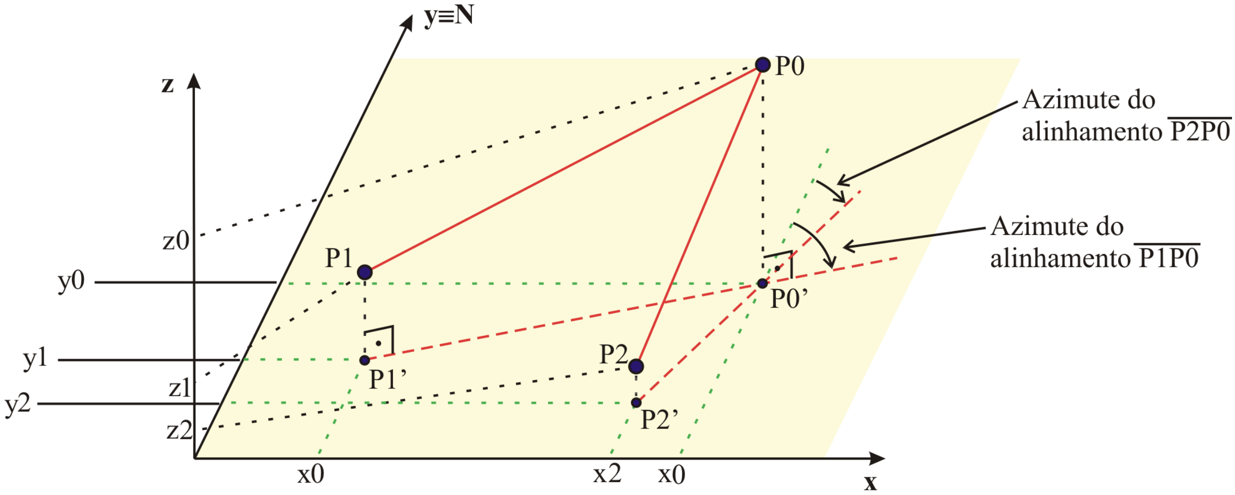

Figura 7.5 – Posicionamento a partir de três ângulos

Visualizando a projeção no plano xy, teremos:

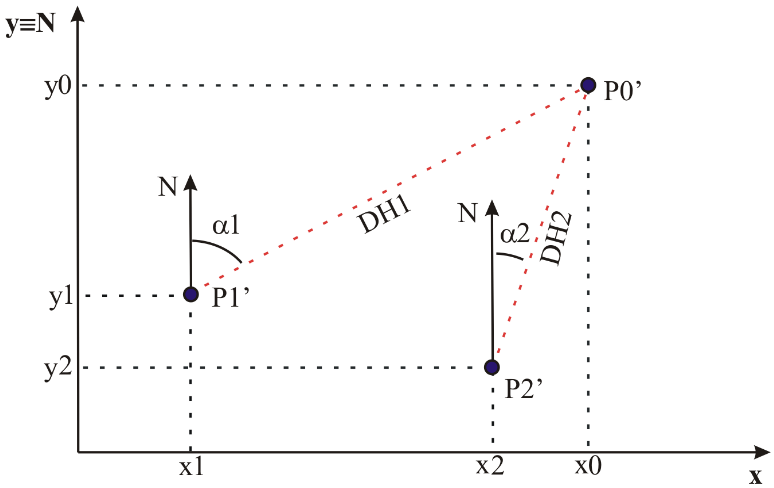

Figura 7.6 – Projeção no plano xy

onde:

$\alpha 1$ = azimute do alinhamento P1-P0

$\alpha 2$ = azimute do alinhamento P2-P0

D1 = distância horizontal entre P1 e P0

D2 = distância horizontal entre P2 e P0

Uma vez que as coordenadas de P1 e P2 são conhecidas, os azimutes podem ser obtidos caso esses pontos sejam intervisíveis, fazendo uma visada entre eles. Caso contrário, é necessário no mínimo um terceiro ponto conhecido, que sirva de referência para a obtenção das direções.

Lembremos que, para esse tipo de determinação, o cálculo de x0 e y0 depende exclusivamente dos ângulos horizontais, enquanto de z0 depende do ângulo vertical e da distância horizontal entre os pontos.

Estabelecendo uma relação entre as coordenadas de P1 e P0, teremos:

$$x0 = x1 + \text{sen}(\alpha 1) \cdot D1 \qquad [7.9]$$

$$y0 = y1 + \cos(\alpha 1) \cdot D1 \qquad [7.10]$$

Multiplicando [10] por $\tan(\alpha 1)$:

$$y0 \cdot tg(\alpha 1) = y1 \cdot \tan(\alpha 1) + \text{sen}(\alpha 1) \cdot D1 \qquad [7.11]$$

Fazendo [9] – [11]:

$$x0 - y0 \cdot \tan(\alpha 1) = x1 - y1 \cdot \tan(\alpha 1) \qquad [7.12]$$

Se aplicarmos o mesmo procedimento para o ponto 2, teremos:

$$x0 - y0 \cdot \tan(\alpha 2) = x2 - y2 \cdot \tan(\alpha 2) \qquad [7.13]$$

Então temos o sistema de equações:

$$x0 - y0 \cdot \tan(\alpha 1) = x1 - y1 \cdot \tan(\alpha 1) \qquad [7.14]$$

$$x0 - y0 \cdot \tan(\alpha 2) = x2 - y2 \cdot \tan(\alpha 2) \qquad [7.15]$$

Fazendo [15] – [14]:

$$y0 \cdot \tan(\alpha 1) - y0 \cdot \tan(\alpha 2) = y1 \cdot \tan(\alpha 1) - y2 \cdot \tan(\alpha 2) + x2 - x1 \qquad [7.16]$$

$$(\tan(\alpha 1) - \tan(\alpha 2)) \cdot y0 = (x2 - x1) + (y1 \cdot \tan(\alpha 2) - y2 \cdot \tan(\alpha 1)) \qquad [7.17]$$

$$y0 = \frac{(x2 - x1) + (y1 \cdot \tan(\alpha 2) - y2 \cdot \tan(\alpha 1))}{(\tan(\alpha 1) - \tan(\alpha 2))} \qquad [7.18]$$

Com a equação [18] pode-se então determinar o valor de y0. Para calcular x0, basta substituir o valor encontrado na equação [14] ou [15], como segue:

$$x0 = x1 - y1 \cdot \tan(\alpha 1) + y0 \cdot \tan(\alpha 1) \qquad [7.19]$$

ou

$$x0 = x2 - y2 \cdot \tan(\alpha 2) + y0 \cdot \tan(\alpha 2) \qquad [7.20]$$

Uma vez conhecidos x0 e y0, é possível calcular y0, que depende do ângulo vertical e da distância horizontal entre os pontos. Digamos que o ângulo vertical do alinhamento P2-P0 é conhecido. Neste caso, temos a situação ilustrada na Figura 7.7.

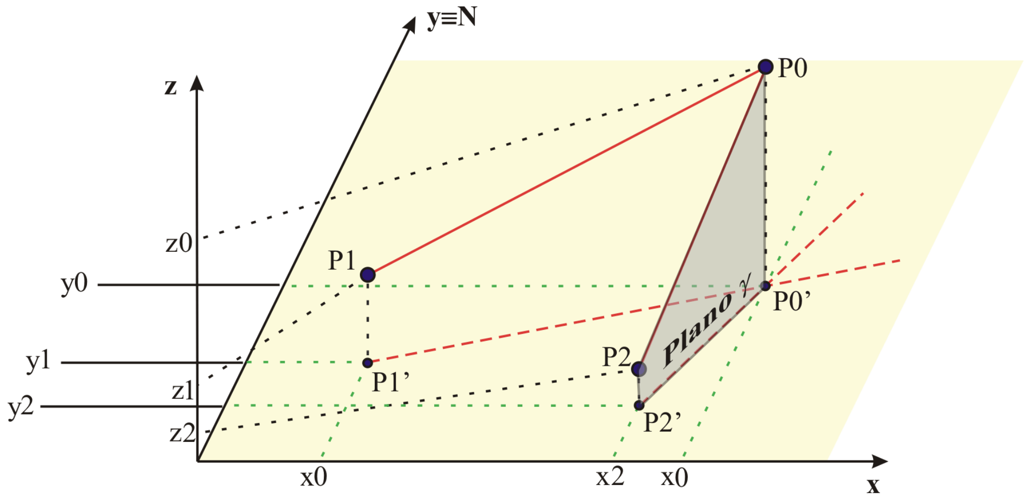

Figura 7.7 – Representação do plano γ

Semelhantemente ao caso anterior, o plano γ é o plano paralelo ao eixo z e que, neste caso, contém os pontos P2 e P0. Analisando o plano γ, temos a seguinte situação:

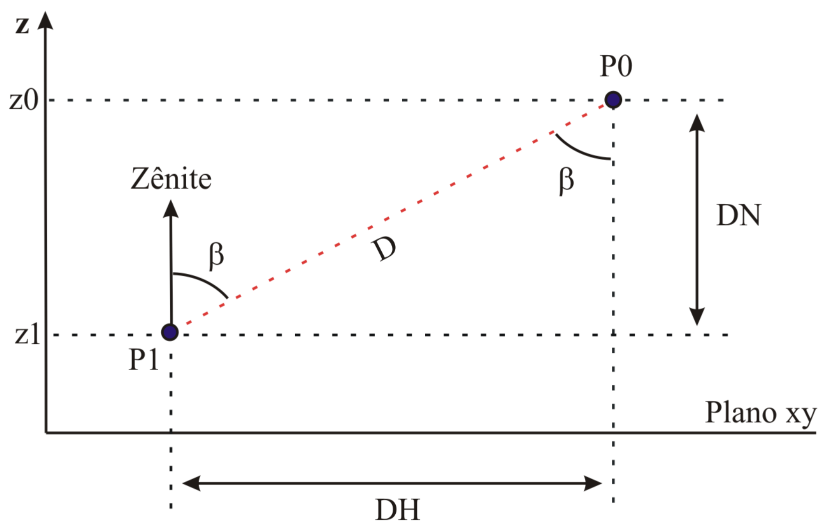

Figura 7.8 – Elementos do plano γ

onde: D = distância inclinada entre os dois pontos, DH = distância horizontal entre os dois pontos, DN = diferença de nível entre os dois pontos e β = ângulo vertical [zenital] do alinhamento.

Sendo assim, podemos estabelecer a seguinte relação:

$$z0 = z2 + DN \qquad [7.21]$$

Sendo que:

$$DN = \frac{DH}{\tan(\beta)} \qquad [7.22]$$

e

$$DH = \sqrt{(x0 - x2)^2 + (y0 - y2)^2} \qquad [7.23]$$

Portanto:

$$z0 = z2 + \frac{\sqrt{(x0 - x2)^2 + (y0 - y2)^2}}{\tan(\beta)} \qquad [7.24]$$

Este procedimento [cálculo de z0] pode ser executado com qualquer um dos pontos de referência, dependendo de qual ângulo vertical é conhecido. Caso tenhamos os ângulos verticais dos dois alinhamentos, pode-se calcular z0 em relação a P1 e a P2 e então fazer a média dos resultados.

7.3 - Determinação a partir de três distâncias e três pontos conhecidos

Aqui analisaremos a determinação das coordenadas de um ponto a partir de três pontos conhecidos, cujas distâncias até o ponto desconhecido foram medidas.

Sejam três pontos de coordenadas conhecidas, P1[x1,y1,z1], P2[x2,y2,z2] e P3[x3,y3,z3], e um desconhecido, P0[xp,yp,zp]. Digamos que foram medidas as distâncias entre os três pontos de referência e P0. Esta situação pode ser visualizada na Figura 7.9.

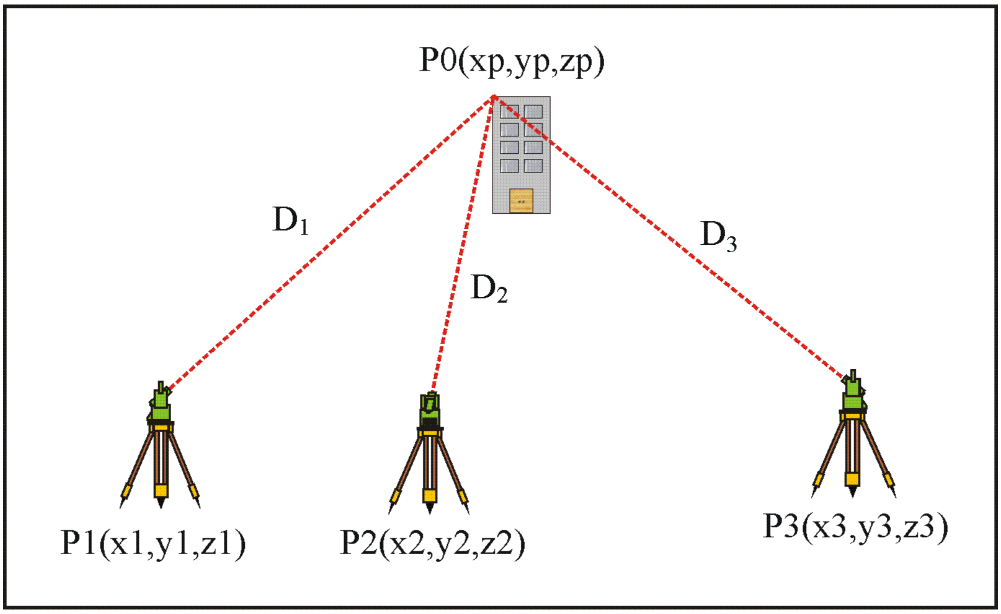

Figura 7.9 – Visada de três pontos conhecidos [P1, P2 e P3] para um desconhecido [P0]

onde D_1, D_2 e D_3 são as distâncias espaciais entre os pontos de referência e o ponto desconhecido.

Sendo assim, podemos estabelecer as seguintes relações:

$$D_1 = \sqrt{(xp - x1)^2 + (yp - y1)^2 + (zp - z1)^2} \quad [7.25]$$

$$D_2 = \sqrt{(xp - x2)^2 + (yp - y2)^2 + (zp - z2)^2} \quad [7.26]$$

$$D_3 = \sqrt{(xp - x3)^2 + (yp - y3)^2 + (zp - z3)^2} \quad [7.27]$$

Desta forma, temos um sistema de três equações e três incógnitas. Porém as equações não são lineares, sendo preciso então que sejam transformadas em equações do primeiro grau [O processo de linearização de equações é explicado no anexo A deste livro]. Após isso, pode-se resolver normalmente o sistema linear.

Substituem-se então as incógnitas xp, yp e zp por:

$$xp = xp_0 + \Delta x \quad [7.28]$$

$$yp = yp_0 + \Delta y \quad [7.29]$$

$$zp = zp_0 + \Delta z \quad [7.30]$$

Onde xp_0, yp_0 e zp_0 são as coordenadas aproximadas para o ponto P0. Cabe a quem for executar esse procedimento escolher convenientemente esses valores.

Para cada um dos três pontos conhecidos, sabemos que a distância é uma função f[xp, yp, zp]. Portanto, sabe-se que, para transformar essa função em uma função linear, teremos, para cada ponto i = 1,2 e 3:

$$D_i = f_i(xp, yp, zp) = f_i(xp_0, yp_0, zp_0) + \frac{\partial f_i(xp_0, yp_0, zp_0)}{\partial xp_0} \cdot \Delta x + \cdots$$

$$\cdots + \frac{\partial f_i(xp_0, yp_0, zp_0)}{\partial yp_0} \cdot \Delta y + \frac{\partial f_i(xp_0, yp_0, zp_0)}{\partial zp_0} \cdot \Delta z \quad [7.31]$$

Calculando os termos desta equação para cada ponto, teremos:

$$f_1(xp_0, yp_0, zp_0) = \sqrt{(xp_0 - x1)^2 + (yp_0 - y1)^2 + (zp_0 - z1)^2} = a1 \quad [7.32]$$

$$f_2(xp_0, yp_0, zp_0) = \sqrt{(xp_0 - x2)^2 + (yp_0 - y2)^2 + (zp_0 - z2)^2} = a2 \quad [7.33]$$

$$f_3(xp_0, yp_0, zp_0) = \sqrt{(xp_0 - x3)^2 + (yp_0 - y3)^2 + (zp_0 - z3)^2} = a3 \quad [7.34]$$

$$\frac{\partial f_1(xp_0, yp_0, zp_0)}{\partial xp_0} = \frac{x1 - xp_0}{a1} = b1 \qquad [7.35]$$

$$\frac{\partial f_2(xp_0, yp_0, zp_0)}{\partial xp_0} = \frac{x2 - xp_0}{a2} = b2 \qquad [7.36]$$

$$\frac{\partial f_3(xp_0, yp_0, zp_0)}{\partial xp_0} = \frac{x3 - xp_0}{a3} = b3 \qquad [7.37]$$

$$\frac{\partial f_1(xp_0, yp_0, zp_0)}{\partial yp_0} = \frac{y1 - yp_0}{a1} = c1 \qquad [7.38]$$

$$\frac{\partial f_2(xp_0, yp_0, zp_0)}{\partial yp_0} = \frac{y2 - yp_0}{a2} = c2 \qquad [7.39]$$

$$\frac{\partial f_3(xp_0, yp_0, zp_0)}{\partial yp_0} = \frac{y3 - yp_0}{a3} = c3 \qquad [7.40]$$

$$\frac{\partial f_1(xp_0, yp_0, zp_0)}{\partial zp_0} = \frac{z1 - zp_0}{a1} = d1 \qquad [7.41]$$

$$\frac{\partial f_2(xp_0, yp_0, zp_0)}{\partial zp_0} = \frac{z2 - zp_0}{a2} = d2 \qquad [7.42]$$

$$\frac{\partial f_3(xp_0, yp_0, zp_0)}{\partial zp_0} = \frac{z3 - zp_0}{a3} = d3 \qquad [7.43]$$

Calculados os valores de todos os elementos, teremos o sistema linear de três equações para três incógnitas [Δx, Δy, Δz]:

$$D_1 = a1 + b1 \cdot \Delta x + c1 \cdot \Delta y + d1 \cdot \Delta z \qquad [7.44]$$

$$D_2 = a2 + b2 \cdot \Delta x + c2 \cdot \Delta y + d2 \cdot \Delta z \qquad [7.45]$$

$$D_3 = a3 + b3 \cdot \Delta x + c3 \cdot \Delta y + d3 \cdot \Delta z \qquad [7.46]$$

Resolvido o sistema, calculam-se os valores e xp, yp, e zp por meio das equações [7.28], [7.29] e [7.30].

7.4. Referências Bibliográficas:

ANDERSON, J.M.; MIKHAIL, E.M. (1998). *Surveyng: Theory and practice*. 7th ed. New York: Wcb McGraw-Hill.

BRINKER, R.C.; WOLF, P.R. (1994).Elementary Surveying, 9ª edição, New York: HaperCollins.

BRINKER, R.C.; TAYLOR, W.C. (1961). *Elementary surveying*. Scranton: International Textbook Company. 621p.

CINTRA, J.P. (1989). Sistema UTM – Noções de Geodésia e Cartografia. São Paulo, EPUSP-PTR.

ELFICK, M., FRYER, J., BRINKER, R.,WOLF, P. (1994). Elementary surveying, 8ª edição – HarperCollins Publishers ltd, Uk.

MCCORMAC, Jack (1995). "Surveying". Prentice Hall. Third Edition. ISBN 0-13-031162-6.

MENDONÇA, Francisco J. B. (1992). "Introdução à teoria dos erros". Apostila editada pelo Depto. de Engenharia Cartográfica - DeCart, Universidade Federal do Pernambuco.

MOFFIT, F.H., BOUCHARD, H. (1987). Surveying, 8ª edição, Harper & Row, New York.

MOREIRA, A.P. (1998). *Métodos de cálculos de coordenadas tridimensionais para controle de obras de engenharia.* Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos. 1998.

MUELLER, I.I., RAMSAYER, K.H. (1979). Introduction to surveying – Fredrick Ungar Publishing Co/New York.

RAPP, R.H. (1989). Geometric Geodesy, part I, Departament of Geodetic Science and Surveying, Ohio State University.

SCHOFIELD, W. (1993). Engineering surveying: Theory and examination problems for Students. 4th ed. London: Butterworth-Heinemann Ltd.

TORGE, W. (1991). *Geodesy.* 2nd ed. Berlin-New York: Walter de Gruyter.

VANICEK, P.; KRAKIWSKY, E.J. (1986). *Geodesy: The concepts.* 2nd ed. Amsterdam-New York-Oxford: North-Holland Publishing Company. 697p.

WOLF, R. P., BRINKER, R. C. (1994). Elementary surveying, 9ª edição, HarperCollins College Publishers, New York.

==============================